



総合演習



例題 1 整式 $f(x)$ について、恒等式 $f(x^2) = x^3 f(x+1) - 2x^4 + 2x^2$ が成り立つとする。

(1) $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$ の値を求めよ。

(2) $f(x)$ の次数を求めよ。

(3) $f(x)$ を決定せよ。

(東京都立大)



例題 2 座標平面上に原点 O , 点 $A(5, 2)$, 点 $B(11, 10)$ がある。条件 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 0$ を満たす点 $P(x, y)$ の軌跡を求めよ。さらに, $|\overrightarrow{OP}|$ の最大値と最小値, およびそのときの P の座標をそれぞれ求めよ。

(長崎大)



例題 3 実数 a, b を係数とする関数 $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2$ について、次の問いに答えよ。

(1) $y = f(x)$ のグラフを C とする。点 $(1, f(1))$ における接線 ℓ の式を a, b を用いて表せ。

(2) (1)の接線 ℓ は点 $(-2, f(-2))$ においても C に接している。このとき, a, b の値を求めよ。

(3) (2)のとき, C と ℓ で囲まれた部分の面積を求めよ。

(京都産業大)



例題 4 関係式 $f_1(x) = -x + 2$, $f_{n+1}(x) = \frac{2}{3} \int_{-2}^1 (x+t)f_n(t)dt$ ($n=1, 2, 3, \dots$) により関数 $f_n(x)$ を定める。

(1) $f_2(x)$ を求めよ。

(2) 各 n について $f_n(x) = a_n x + b_n$ により定数 a_n, b_n を定める。

(i) a_{n+1}, b_{n+1} を a_n, b_n を用いて表せ。

(ii) 各 n について $c_n = a_n - b_n$ とするとき, 数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ。

(iii) $f_n(x)$ を求めよ。

(愛媛大)



例題 5 α, β を実数とする。 xy 平面内で、点 $(0, 3)$ を中心とする円 C と放物線

$y = -\frac{x^2}{3} + \alpha x - \beta$ が点 $P(\sqrt{3}, 0)$ を共有し、さらに P における接線が一致している。

(1) α, β の値を求めよ。

(2) 円 C , 放物線 $y = -\frac{x^2}{3} + \alpha x - \beta$ および y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

(京都大)



例題 6 (1) 不等式 $\frac{3}{10} < \log_{10} 2 < \frac{4}{13}$ を証明せよ。ただし、必要であれば, $2^{10} = 1024$, $2^{13} = 8192$ を用いてよい。

(2) (1)を用いて, 2^{100} は何桁の数か答えよ。

(3) $\log_{10} 2$ が無理数であることを証明せよ。

(岐阜大)



例題 7 x を正の実数とし、座標平面上に3点 $A(x, 0)$, $B(-2, 2)$, $C(-3, 3)$ をとる。直線 AB と直線 AC のなす角を θ とする。ただし, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ とする。

(1) $\tan \theta$ を x で表せ。

(2) $x > 0$ における $\tan \theta$ の最大値およびそのときの x の値を求めよ。

(北海道大)



例題 8 x が任意の実数値をとるとき, $\frac{x+2}{x^2+2x+16}$ のとりうる値の範囲を求めよ。

(改 関西学院大)

例題 9 円 $x^2 + (y-1)^2 = 1$ を C , 円 $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$ を C_0 とする。 C, C_0, x 軸に接する円を C_1 とする。 C, C_1, x 軸に接し C_0 と異なる円を C_2 とし、これを繰り返して C, C_n, x 軸に接し C_{n-1} と異なる円を C_{n+1} とする。また, 円 C_n の半径を a_n とする。

(1) a_1 を求めよ。

(2) $b_n = \frac{1}{\sqrt{a_n}}$ とするとき, 数列 $\{b_n\}$ の満たす漸化式を求めよ。

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(信州大)



10 直線 $\ell: y = px + q$ が、放物線 $y = x^2$ と円 $C: x^2 + (y+1)^2 = 1$ の両方に接している。ただし、 $p > 0$ とする。次の問いに答えよ。

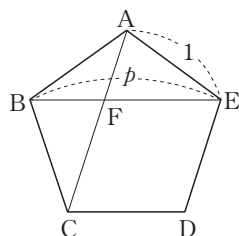
- (1) p と q を求めよ。
- (2) 放物線 $y = x^2$ と円 C の両方に接する直線は、直線 ℓ と x 軸以外にもう 1 本存在する。この直線を m とするとき、直線 ℓ 、直線 m の上側に中心があって、直線 ℓ 、直線 m 、円 C のすべてと接する 2 つの円について、中心の座標をそれぞれ求めよ。

(成城大)



11 右の図のような辺の長さが 1 である正五角形 $ABCDE$ がある。AC と BE の交点を F、BE の長さを p とする。

- (1) p の値を求めよう。 $\angle BAE = \boxed{\text{ア}}^\circ$ である。また、 $\angle AEB = \angle ABE = \boxed{\text{イ}}^\circ$ なので、 $\angle CAD = \boxed{\text{ウ}}^\circ$ 。以上より、 $\angle EAF = \angle EFA = \boxed{\text{エ}}^\circ$ となり、 $\triangle EAF$ は二等辺三角形である。このことより、 $BF = AF = \boxed{\text{オ}}p - \boxed{\text{カ}}$ 。また、 $\triangle ABE$ と $\triangle FAB$ は相似なので、 $p = \boxed{\text{キ}}$ となる。



- (2) $\triangle ACD$ の面積を p を用いて表してみよう。

$$\cos \angle CAD = \frac{\boxed{\text{ク}}p^2 - \boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}p^2} \text{ より、} \sin \angle CAD = \frac{\sqrt{\boxed{\text{サ}}p^2 - \boxed{\text{シ}}}}{\boxed{\text{ス}}p^2}$$

したがって、 $\triangle ACD$ の面積は $\frac{\sqrt{\boxed{\text{サ}}p^2 - \boxed{\text{シ}}}}{\boxed{\text{セ}}}$ となる。

(松山大)



12 実数 a, b に対して、 $f(x) = a(x-b)^2$ とおく。ただし、 a は正とする。放物線 $y = f(x)$ が直線 $y = -4x + 4$ に接している。

- (1) b を a を用いて表せ。
- (2) $0 \leq x \leq 2$ において、 $f(x)$ の最大値 $M(a)$ と、最小値 $m(a)$ を求めよ。
- (3) a が正の実数を動くとき、 $M(a)$ の最小値を求めよ。

(神戸大)



13 n 段の階段を上るのに、1 歩で 1 段、2 段、または 3 段を上ることができるとする。この階段の上り方の総数を a_n とおく。たとえば、 $a_1 = 1$ 、 $a_2 = 2$ 、 $a_3 = 4$ である。

- (1) a_4 、 a_5 の値を求めよ。
- (2) a_n 、 a_{n+1} 、 a_{n+2} 、 a_{n+3} ($n \geq 1$) の間に成り立つ関係式を求めよ。
- (3) a_{10} の値を求めよ。

(千葉大)

14 実数の間の等式 $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7} = 2 \cdots \cdots (*)$ を以下の手順に従って示せ。

- (1) 係数が整数である x の 3 次方程式で $x = \sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$ が解になるものを 1 つ求めよ。
- (2) (1) で求めた 3 次方程式を解くことにより、等式 $(*)$ を証明せよ。

(東北大)

15 四面体 $ABCD$ において $\overrightarrow{AC}$ と $\overrightarrow{BD}$ が垂直となる必要十分条件は $AD^2 + BC^2 = AB^2 + CD^2$ であることを示せ。

(愛媛大)

例題 16 a, b を実数とし、 $P = a^4 - 4a^2b + b^2 + 3b$ とおく。

- (1) すべての実数 b に対して $P \geq 0$ となるような a の値の範囲を求めよ。
- (2) すべての実数 a に対して $P \geq 0$ となるような b の値の範囲を求めよ。

(岡山理科大)

例題 17 a は定数で $a > 1$ とし、点 $(a, 0)$ を通る傾き m の直線と円 $x^2 + y^2 = 1$ が異なる 2 点 A、B で交わる。

- (1) m の値の範囲を求めよ。
- (2) (1) で求めた範囲を m が動くとき、線分 AB の中点の軌跡を求めよ。

(旭川医科大)

18 n を自然数とする。 $A_n = 2^n + n^2$ 、 $B_n = 3^n + n^3$ とおく。 A_n を 3 で割った余りを a_n とし、 B_n を 4 で割った余りを b_n とする。

- (1) $A_{n+6} - A_n$ は 3 で割り切れることを示せ。
- (2) $1 \leq n \leq 2018$ かつ $a_n = 1$ を満たす n の個数を求めよ。
- (3) $1 \leq n \leq 2018$ かつ $b_n = 2$ を満たす n の個数を求めよ。

(神戸大)



- 19 n は自然数とする。2つの変数 x, y の n 個のデータ $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \dots, (x_n, y_n)$ が与えられている。 x の平均値は $\bar{x}=16$ 、分散は $s_x^2=3$ であり、 y の平均値は $\bar{y}=3$ 、分散は $s_y^2=\frac{2}{3}$ である。 x と y の共分散を s_{xy} とおく。さらに、 $z=2x-3y$ で新たな変数 z を作る。 z のデータは $z_i=2x_i-3y_i$ ($i=1, 2, \dots, n$) である。このとき、 z の平均値 $\bar{z}$ は $\bar{z}=\boxed{\text{ア}}$ となり、 z の分散 s_z^2 を s_{xy} を用いて書き表すと $s_z^2=\boxed{\text{イ}}$ となる。また、 x と z の共分散 s_{xz} を s_{xy} を用いて書き表すと $s_{xz}=\boxed{\text{ウ}}$ となる。 x と y の相関係数を r_{xy} 、 x と z の相関係数を r_{xz} 、 y と z の相関係数を r_{yz} とおき、 $R=(r_{xz})^2+(r_{yz})^2$ とおく。もし、 $r_{xy}=0$ ならば R の値は $R=\boxed{\text{エ}}$ となる。もし、 $r_{xy}=1$ ならば R の値は $R=\boxed{\text{オ}}$ となる。(同志社大)

- 20 n を 2 以上の自然数とする。1 個のさいころを続けて n 回投げる試行を行い、出た目を順に $X_1, X_2, \dots, X_n$ とする。
- (1) $X_1, X_2, \dots, X_n$ の最大公約数が 3 となる確率を n の式で表せ。
 - (2) $X_1, X_2, \dots, X_n$ の最大公約数が 1 となる確率を n の式で表せ。
- (北海道大)

- 21 実数全体を定義域とする関数 $f(x)$ を、 $f(x)=3\int_{x-1}^x(t+|t|)(t+|t|-1)dt$ によって定める。
- (1) $f(x)$ を x の値について場合分けをして、 x の多項式で表せ。
 - (2) 座標平面上に $y=f(x)$ のグラフをかけ。
 - (3) x がすべての実数を動くときの $f(x)$ の最小値を求めよ。(慶應義塾大)

- 例題 22 $\triangle ABC$ の重心を G 、外接円の中心を E とする。
- (1) $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ を示せ。
 - (2) $\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{EH}$ となるように点 H をとると、点 H は $\triangle ABC$ の垂心であることを示せ。
 - (3) E, G, H は一直線上にあり、 $EG:GH=1:2$ であることを示せ。(山梨大)

- 例題 23 a を定数とする。放物線 $y=x^2+a$ と関数 $y=4|x-1|-3$ のグラフとの共有点の個数を求めよ。(大阪府立大)

- 24 1 から 20 までの 20 枚の番号札がある。この中から 2 枚選ぶとき、選ばれた番号の和が偶数となる選び方は $\boxed{\text{ア}}$ 通りであり、3 の倍数となる選び方は $\boxed{\text{イ}}$ 通りである。また、3 枚選ぶとき、選ばれた番号の和が 3 の倍数となる選び方は $\boxed{\text{ウ}}$ 通りである。(甲南大)

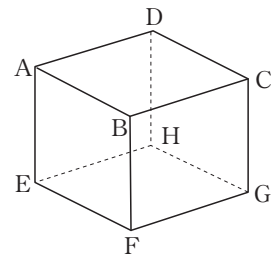
- 例題 25 $a_1=1, a_{2n}=2a_{2n-1}, a_{2n+1}=a_{2n}+2^{n-1}$ ($n=1, 2, 3, \dots$) で定義される数列 $\{a_n\}$ について、次の問いに答えよ。
- (1) 第 $2n$ 項 a_{2n} と第 $(2n+1)$ 項 a_{2n+1} を求めよ。
 - (2) $\sum_{k=1}^{2n} a_k$ を求めよ。(山口大)

- 例題 26 座標平面上の放物線 $C_1: y=x^2$ と円 $C_2: x^2+(y-b)^2=a^2$ ($a>0, b>0$) について、次の問いに答えよ。

- (1) $b=\frac{1}{2}$ のとき、 C_1 と C_2 の共有点の個数を求めよ。
- (2) $b=1$ のとき、 C_1 と C_2 の共有点が 4 個になるような a の範囲を求めよ。(東京電機大)

- 27 どのような自然数 a, b を用いても $x=3a+8b$ と表すことのできない最大の自然数 x は $\boxed{\text{ア}}$ である。また $x=3a+8b$ (a, b は自然数) と表すことのできない自然数 x は $\boxed{\text{イ}}$ 個ある。(摂南大)

- 28 右図のような 1 辺の長さが 2 の立方体 $ABCD-EFGH$ に対して、対角線 AG と DF の交点を O とする。線分 AO 上の点 P と線分 DO 上の点 Q が $OQ=2AP-1$ を満たしながら動くとき、 $\triangle OPQ$ の面積の最大値を求めよ。ただし点 P, Q は点 O とは一致しないものとする。(千葉大)



例題 29 立方体の6面を、赤、青、黄、緑、白、黒の6色を用いて塗ることを考える。ただし、立方体を回転してすべての面の色の並びが同じであれば、同じ塗り方であるとする。



- 1つの面を赤に、その向かい合う面を青に塗り、残りの4面を黄、緑、白、黒の4色すべてを用いて塗る場合、その塗り方は **ア** 通りある。そのうち、白と黒とが向かい合う面に塗られているのは **イ** 通りあり、白と黒とが隣り合う面に塗られているのは **ウ** 通りある。
- 6面を赤、青、黄、緑、白、黒の6色すべてを用いて塗る場合、その塗り方は **エ** 通りある。
- 1つの面を赤に、その向かい合う面を青に塗り、残りの4面を赤、黄、緑、白の4色すべてを用いて塗る場合、その塗り方は **オ** 通りある。
向かい合う2面を赤で塗り、残りの4面を青、黄、緑、白の4色すべてを用いて塗る場合、その塗り方は **カ** 通りある。
6面のうち2面を赤で塗り、残りの4面を青、黄、緑、白の4色すべてを用いて塗る場合、その塗り方は **キ** 通りある。(京都産業大)

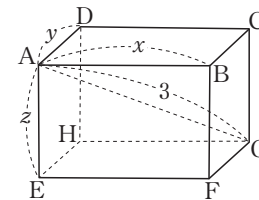
例題 30 $f(x) = x^3 - x$ とし、関数 $y = f(x)$ のグラフを C とする。

- C 上の点 $(t, f(t))$ における C の接線の方程式を求めよ。
- $t \neq t'$ のとき、点 $(t, f(t))$ における C の接線と点 $(t', f(t'))$ における C の接線は異なることを示せ。
- C の接線で点 $\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ を通るものの方程式をすべて求めよ。
- 点 (u, v) を通る C の接線が3本存在するための u, v の満たすべき条件を求めよ。また、その条件を満たす点 (u, v) の存在範囲を図示せよ。(鹿児島大)

例題 31 n を3以上の自然数とする。 n 次多項式 $(x+1) \times (x+2) \times \cdots \times (x+n)$ を展開し、 x^k の係数を a_k とおく ($k=0, 1, 2, \dots, n$)。

- a_{n-1} を n を用いて表せ。
- $n=5$ のとき、 a_3 の値を求めよ。
- a_{n-2} を n を用いて表せ。(中央大)

例題 32 右の図のように、 $AB=x$, $AD=y$, $AE=z$ である直方体 $ABCD-EFGH$ が空間内にある。直方体の対角線 AG の長さを3、表面積 S を16とする。



- $x+y+z$ の値を求めよ。
- $y+z$ と yz を x の式で表し、 x を用いて y, z を解とする t の2次方程式を作れ。
- x の値のとりうる範囲を求めよ。
- この直方体の体積を V とするとき、 V の最大値および最小値を求めよ。また、そのときの x の値を求めよ。(長崎大)

33 xy 平面において、連立不等式

$$0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi, 2\sin(x+y) - 2\cos(x+y) \geq \sqrt{2}$$

の表す領域を D とする。

- D を図示せよ。
- 点 (x, y) が領域 D を動くとき、 $2x+y$ の最大値と最小値を求めよ。(大阪大)

34 xyz 空間の原点を中心とする半径1の球面を S とし、 $P(x_0, y_0, z_0)$ は、 $N(0, 0, 1)$ とは異なる S 上の点であるとする。 N と P を通る直線上の点 Q に対し、 $(*) \quad \overrightarrow{NQ} = t\overrightarrow{NP}$ を満たす実数 t が定まる。このとき、次の問いに答えよ。

- N と P を通る直線上の点 Q が xy 平面上にあるとき、 $(*)$ を満たす t を z_0 を用いて表せ。
- (1) の Q の座標を x_0, y_0, z_0 を用いて表せ。
- S と平面 $z=a$ ($0 < a < 1$) とが交わってできる図形を C とする。点 P が C 上を動くとき、 P に対する(1)の点 Q の軌跡を求めよ。(富山大)

35 等式 $\left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{b}\right)\left(1 + \frac{1}{c}\right) = 2$ を満たす正の整数の組 (a, b, c) で $a \geq b \geq c$ を満たすものをすべて求めよ。(鳥取大)



- 例題 36** a を定数とする。 x についての方程式 $x^2 + (a+2)x - \frac{1}{2}a + 5 = 0$ が異なる 2 つの実数解をもち、2 つの実数解のうち、少なくとも 1 つが $-4 < x < 0$ の範囲にあるとき、 a のとりうる値の範囲を求めよ。
(改 摂南大)

-  **37** a を実数とし、座標平面上に 2 点 $A(a, 0)$, $B(3, 1)$ があるとき、次の問いに答えよ。

- (1) 2 点 A , B から等距離にある点の軌跡を表す方程式を a を用いて表せ。
- (2) 線分 AB の垂直二等分線を ℓ とする。 a が実数全体を動くとき、直線 ℓ が通る点 (x, y) の全体を図示せよ。
- (3) a が $a \geq 0$ の範囲を動くとき、線分 AB の垂直二等分線 ℓ が通る点 (x, y) の全体を図示せよ。
(同志社大)

- 例題 38** a, b を実数とし、整式 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ を考える。

- (1) a, b を $f(1), f(-1)$ を用いて表せ。
- (2) $f(1)$ と $f(-1)$ がともに整数であれば、すべての整数 n に対して、 $f(n)$ も整数となることを証明せよ。
(関西大)

-  **39** 連立不等式 $2x - y \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 5$ が表す領域を D とする。

- (1) 点 $P(x, y)$ が D 内を動くとき、 $2x + y$ の最大値と、最大値を与える点の座標を求めよ。
- (2) 次の条件を満たす実数 a の範囲を求めよ。
条件：点 $P(x, y)$ が D 内を動くとき、点 $A(1, 2)$ において $ax + y$ が最大値をとる。
(学習院大)

-  **40** $\triangle ABC$ において、頂点 A から直線 BC に下ろした垂線の長さは 1、頂点 B から直線 CA に下ろした垂線の長さは $\sqrt{2}$ 、頂点 C から直線 AB に下ろした垂線の長さは 2 である。このとき、 $\triangle ABC$ の面積と、内接円の半径、および、外接円の半径を求めよ。
(千葉大)