

公式

36. ベクトルと平面図形

基本問題

例題 307 (1) $A(\vec{a}), B(\vec{b}), C(\vec{c})$ を頂点とする $\triangle ABC$ で辺 AB の中点を M, 辺 BC を 1:3 に内分する点を D とする。 $\triangle MDC$ の重心の位置ベクトル \vec{g} を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ で表せ。

(2) 平行四辺形 ABCD で、線分 AC を 3:2 に内分する点を E, 辺 AD を 3:2 に外分する点を F, $\vec{AB}=\vec{b}, \vec{AD}=\vec{d}$ とする。 $\triangle ABC$ の重心を G とするとき、 \vec{GE}, \vec{GF} を \vec{b}, \vec{d} で表し、 G, E, F は一直線上にあることを示せ。

●内分点の位置ベクトル

$A(\vec{a}), B(\vec{b})$ のとき、線分 AB を $m:n$ に内分する点の位置ベクトルは、

$$\frac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}$$

●一直線上にある条件

3点 A, B, C が一直線上にある $\iff \vec{AC}=k\vec{AB}$ となる実数 k がある

柱

例題 308 $\triangle ABC$ において、辺 AB を 1:3 に内分する点を P, 辺 AC を 1:4 に内分する点を Q とし、線分 BQ と CP の交点を R, 直線 AR と辺 BC の交点を S とする。 $\vec{AB}=\vec{a}, \vec{AC}=\vec{b}$ とおくと、次の問いに答えよ。

- \vec{AP}, \vec{AQ} を \vec{a}, \vec{b} を用いて表せ。
- \vec{AR}, \vec{AS} を \vec{a}, \vec{b} を用いて表せ。
- $\triangle ABC$ の面積は $\triangle RBS$ の面積の何倍かを答えよ。(香川大)★★

考え方 (2) (\vec{AR} の求め方) 交点の位置ベクトルは、線分の長さの比を $s:(1-s)$ とおくなどして 2 通りに表し、係数を比較して求める。

例題 309 $\triangle ABC$ の内部の点を P とし、 $\vec{AP}+2\vec{BP}+3\vec{CP}=\vec{0}$ が成り立つとする。

- \vec{AP} を \vec{AB}, \vec{AC} を用いて表せ。
- $\triangle ABP$ の面積を S_1 とし、 $\triangle ABC$ の面積を S_2 とするとき、 $S_1:S_2$ を求めよ。(改慶應義塾大)★★

考え方 (1) 条件式 $\vec{AP}+2\vec{BP}+3\vec{CP}=\vec{0}$ を、頂点 A を基点とした式に変形する。

310 $AB=3, AC=2, \angle BAC=60^\circ$ である $\triangle ABC$ で、 $\vec{AB}=\vec{b}, \vec{AC}=\vec{c}$ とする。点 A から辺 BC に垂線 AP を引くとき、 \vec{AP} を \vec{b}, \vec{c} で表せ。(甲南大)★★

A

311 平行四辺形 ABCD において、辺 AB を 2:1 に内分する点を E, 辺 AD を 3:2 に内分する点を F, 辺 AD の中点を G とする。直線 BG と直線 EF の交点を P とすると、 $\vec{AP}=\square{\text{ア}}\vec{AB}+\square{\text{イ}}\vec{AD}$ である。直線 AP と直線 DC の交点を Q とすると、 $DQ:QC=\square{\text{ウ}}:\square{\text{エ}}$ である。(西南学院大)★★

例題 312 O を原点とする座標平面上の 2 点 $A(13, 12), B(17, 28)$ に対して、点 P を $(\vec{OP}-\vec{OA})\cdot(\vec{OP}-\vec{OB})=\vec{OA}\cdot\vec{OB}$ を満たすようにとる。このとき、このような点 P の全体は、中心が $\square{\text{ア}}$, 半径が $\square{\text{イ}}$ の円である。(関西大)★★

***313** $\triangle OAB$ に対し、 $\vec{OP}=s\vec{OA}+t\vec{OB}$ (s, t は 0 以上の実数) とおく。 s, t が次の条件を満たしながら変化するとき、点 P の存在範囲を求めよ。

- 例題** (1) $s+3t=2$ ★
- 例題** (2) $0\leq s+t\leq 1$ ★★
- 例題** (3) $1\leq 2s+t\leq 2$ ★★★

例題 314 $\triangle ABC$ において、 $AB=2, AC=3, BC=4$ とする。 $\triangle ABC$ の外接円の中心を P, 内接円の中心を I とするとき、次の問いに答えよ。

- \vec{AP} と \vec{AI} をそれぞれ \vec{AB}, \vec{AC} で表せ。
- IP の長さを求めよ。(改早稲田大)★★★

B

315 平面上に平行四辺形 ABCD および $\vec{PB}+\vec{PC}+\vec{PD}=r\vec{PA}$, $-1\leq r\leq 1$ を満たす点 P がある。

- $\vec{PB}+\vec{PC}+\vec{PD}$ を \vec{AP} と \vec{AC} で表せ。ただし、 r を用いてはならない。
- 対角線 AC の中点を Q とする。点 P は線分 QC 上の点であることを示せ。
- 辺 BC を 2:1 に内分する点を R とする。D, P, R が一直線上にあるときの r の値を求めよ。(公立鳥取環境大)★★★★

解説動画

公式

37. ベクトルと空間図形

基本問題

316 (1) 3点 $A(1, 2, 1)$, $B(a, b, 2)$, $C(b, a, 3)$ が一直線上にあるとき, a, b の値を求めよ。

例題 (2) $\vec{a}=(1, 2, 3)$, $\vec{b}=(2, -3, -1)$ のとき, \vec{a} , \vec{b} のなす角 θ を求めよ。また, \vec{a} と直交し \vec{b} とも直交する単位ベクトル \vec{e} を求めよ。

例題 (3) 2点 $A(1, 2, -2)$, $B(3, 4, -2)$ と xy 平面上の点 C に対し, $\triangle ABC$ が正三角形になるとき, 点 C の座標を求めよ。

●空間のベクトルの内積

平面ベクトルと同様に,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$

(θ は \vec{a} , \vec{b} のなす角) と定義される。

●内積と成分

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3),$$

$$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3) \text{ のとき,}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

柱

例題 317 4点 $A(1, 2, 3)$, $B(2, 1, 0)$, $C(3, 2, 1)$, $D(-1, 2, z)$ が同一平面上にあるとき, z の値を求めよ。(立教大)★

考え方 点 D が平面 ABC 上にある $\iff \vec{AD} = s\vec{AB} + t\vec{AC}$ となる実数 s, t がある

例題 318 四面体 $OABC$ において, 辺 OA を $1:1$ に内分する点を D , 線分 BD を $3:2$ に内分する点を E , 線分 CE を $3:1$ に内分する点を F , 直線 OF と平面 ABC の交点を P とする。 $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$, $\vec{OC} = \vec{c}$ とするとき, \vec{OP} を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ で表せ。(名古屋市立大)★★

考え方 点 P が平面 ABC 上にある

$$\iff \vec{OP} = s\vec{OA} + t\vec{OB} + u\vec{OC}, \quad s+t+u=1 \text{ となる実数 } s, t, u \text{ が存在する}$$

319 * (1) 空間において, 球面 $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 7 = 0$ が xy 平面と交わってできる円の中心の座標と半径を求めよ。(金沢工業大)★

例題 (2) 2点 $A(4, 5, 2)$, $B(10, 15, 4)$ を通る直線が xz 平面, xy 平面と交わる点をそれぞれ P, Q とする。線分 PQ の長さを求めよ。(防衛医科大学)★★

例題 (3) 中心が点 $(2, 1, 3)$ で, y 軸に接する球面の方程式を求めよ。★★

A

例題 320 2点 $A(0, 1, 5)$, $B(5, 6, 0)$ を通る直線 ℓ に点 $P(4, 8, 13)$ から垂線を下ろし, ℓ との交点を H とする。点 H の座標を求めよ。(改同志社大)★★

*321 四面体 $OABC$ は $OA=4$, $OB=5$, $OC=3$, $\angle AOB=90^\circ$, $\angle AOC=\angle BOC=60^\circ$ を満たしている。

(1) 点 C から $\triangle OAB$ に下ろした垂線と $\triangle OAB$ との交点を H とする。

\vec{CH} を \vec{OA} , \vec{OB} , \vec{OC} を用いて表せ。

(2) 四面体 $OABC$ の体積を求めよ。

(東京理科大)★★

322 空間内に点 $A(3, 7, 5)$ と $\vec{a}=(1, 2, 2)$ がある。点 A を通り \vec{a} に垂直な平面 α 上に点 $P(x, y, z)$ をとるとき, 次の問いに答えよ。

(1) x, y, z の間に成り立つ関係式を求めよ。

(2) 原点 O から平面 α に垂線 OH を下ろすとき, 点 H の座標を求めよ。

(3) 平面 α と球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 225$ が交わってできる円の半径を求めよ。

(東北学院大)★★★

例題 323 四面体 $OABC$ において, 辺 AB の中点を P , 線分 PC の中点を Q とする。 $0 < m < 1$ に対し, 線分 OQ を $m:(1-m)$ に内分する点を R , 直線 AR と平面 OBC の交点を S とする。ただし, $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$, $\vec{OC} = \vec{c}$ とする。

(1) \vec{OP} , \vec{OQ} , \vec{OR} を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ と m で表せ。

(2) $AR:RS$ を m で表せ。

(3) 辺 OA と線分 SQ が平行となるときの, m の値を求めよ。(南山大)★★★

B

324 1辺の長さが1の正四面体 $OABC$ で, 辺 OA を $3:1$ に内分する点を D , 辺 OB を $2:1$ に内分する点を E , 辺 AC を $2:1$ に内分する点を F とする。3点 D, E, F が定める平面を α とし, 平面 α と辺 BC との交点を G とする。

(1) \vec{OG} を \vec{OB} と \vec{OC} を用いて表せ。

(2) $\triangle EFG$ の面積を求めよ。

(東北大)★★★★

公式

38. データの分析

QR 共通テストの問題を確認

基本問題

325 次のデータはある高校生の9日間の通学時間を短い方から順に並べたものである。(単位は分)

24, 29, 31, 32, 33, 34, 38, 39, 46

このデータについて、次の問いに答えよ。

(1) 平均値, 中央値を求めよ。

例題 (2) 第1四分位数, 第3四分位数を求めよ。

また, 四分位範囲を求めよ。

(3) 分散, 標準偏差を求めよ。

●データの平均と分散

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$$

$$s_x^2 =$$

$$\frac{1}{n}\{(x_1 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2\}$$

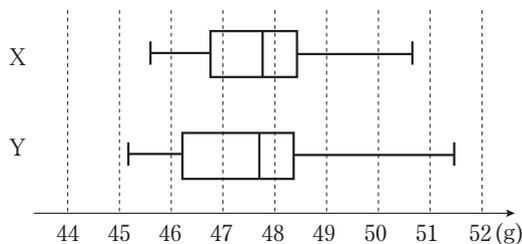
$$= \overline{x^2} - (\bar{x})^2$$

●四分位数

データの値を小さい順に並べたとき, そのデータを4等分する位置の値。

柱

例題 326 次の箱ひげ図は, X社, Y社の販売する卵100個の重さを計量した結果をまとめたものである。



次の①~④の記述について, 必ず正しいといえるものをすべて選べ。

① 範囲が大きいのはXの卵である。

② 四分位範囲が大きいのはYの卵である。

③ Yの卵の半数以上は, 48gより重い。

④ Xの卵で47g以下のものは, 少なくとも25個ある。★

*327 (1) 2つの変数 x, y のデータが, 5個の x, y の値の組として右のように与えられているとする。 x と y の相関係数を求めよ。

x	12	14	11	8	10
y	11	12	14	10	8

(2) 20個の値からなるデータがある。そのうちの15個の値の平均値は10で分散は5であり, 残りの5個の値の平均値は14で分散は13である。このデータの平均値と分散を求めよ。(信州大)★★

*328 2つの変数 x と y の間には, $y=3x-2$ の関係がある。また, 変数 x の平均値を \bar{x} , 分散を s_x^2 とすると, $\bar{x}=5, s_x^2=16$ である。

(1) 変数 y の平均値, 分散, 標準偏差を求めよ。

(2) 変数 x に新たに1つのデータ5を追加する。 x の分散は, 追加する前と追加した後では, どちらの方が小さいか。★★

考え方 (2) 分散は平均値からの散らばり具合を表す。条件より, データを追加する前も追加した後も平均値は変わらないことに注意する。

A

例題 329 ある会社で販売している商品A, Bがある。どちらの商品を買いたい客から無作為に16人を選びアンケートを行ったところ, 12人が商品A, 4人が商品Bと回答した。一般に, 商品Aを買いたい客の方が多いといえるだろうか。仮説検定の考え方を利用し, 起こる割合が5%以下であればほとんど起こりえないとして判断せよ。ただし, $2^{16}=65536$ を用いてよい。★★

*330 n を2以上の自然数とする。

(1) 変数 x のデータの値が x_1, x_2, \dots, x_n であるとし, $f(a) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - a)^2$ とする。 $f(a)$ を最小にする a は x_1, x_2, \dots, x_n の平均値で, そのときの

最小値は x_1, x_2, \dots, x_n の分散であることを示せ。

(2) c を定数として, 変数 y, z の k 番目のデータの値が

$$y_k = k (k=1, 2, \dots, n), z_k = ck (k=1, 2, \dots, n)$$

であるとする。このとき y_1, y_2, \dots, y_n の分散が z_1, z_2, \dots, z_n の分散より大きくなるための c の必要十分条件を求めよ。

(3) 変数 x のデータの値が x_1, x_2, \dots, x_n であるとし, その平均値を \bar{x} とする。新たにデータを得たとし, その値を x_{n+1} とする。 $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}$ の平均値を x_{n+1}, \bar{x} および n を用いて表せ。(改広島大)★★

*331 右の表は、100点満点で実施した数学と英語のテストの得点をまとめたものである。すべての点数は整数で、数学の得点の中央値は84点であった。また、 $a < b < c$ である。

- (1) $a = \boxed{\text{ア}}$, $b = \boxed{\text{イ}}$, $c = \boxed{\text{ウ}}$ である。
 (2) d がわからないとき、英語の得点の中央値は $\boxed{\text{エ}}$ 通りある。
 (3) $d = 89$ とする。
 (i) $e = \boxed{\text{オ}}$, $f = \boxed{\text{カ}}$ である。
 (ii) 数学の得点と英語の得点の相関係数は、 $\frac{3\sqrt{5}}{\boxed{\text{キ}}}$ である。
 (iii) 次の $\boxed{\text{ク}}$ に当てはまるものを、下の①～③から1つ選べ。
 後日、欠席した生徒が同じテストを受け、数学が84点、英語が86点であった。この生徒の得点を含めた全体での数学の得点と英語の得点の相関係数は、(ii)で求めた相関係数と比べて $\boxed{\text{ク}}$ 。
 ① 大きな値となる ② 小さな値となる ③ 同じ値となる
 (改 大阪経済大)★★

生徒番号	数学	英語
1	a	86
2	b	81
3	c	90
4	89	d
5	83	85
6	79	87
7	85	84
平均	84	e
分散	10	f

■ B ■

332 2つの変数 x, y の n 個の値の組 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \dots, (x_n, y_n)$ がある。 a, b は定数とし、 $z_i = ay_i + b$ ($i = 1, 2, \dots, n$) で定められる変数 z を考える。ただし、 $a \neq 0$ とする。変数 x と y の共分散を s_{xy} 、相関係数を r_{xy} とする。

- (1) 変数 x と z の共分散を s_{xz} とすると、 $s_{xz} = as_{xy}$ であることを示せ。
 (2) 変数 x と z の相関係数を r_{xz} とすると、次が成り立つことを示せ。
 $a > 0$ のとき $r_{xz} = r_{xy}$, $a < 0$ のとき $r_{xz} = -r_{xy}$
 (3) $a > 0$ のとき、変数 y と z の相関係数 r_{yz} を求めよ。★★★★

公式

39. 確率分布

QR 共通テストの問題を確認

基本問題

例題 333 (1) 確率変数 X の確率分布が右の表のとき、 X の平均 $E(X)$ 、分散 $V(X)$ 、標準偏差 $\sigma(X)$ を求めよ。

X	0	1	2	計
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

- 例題 (2) 確率変数 X と Y が独立で、
 $E(X) = 2, V(X) = 5, E(Y) = 9, V(Y) = 7$ のとき、 $S = 4X - 3, T = X + Y, U = XY$ で定義される確率変数 S, T, U の平均を求めよ。
 また、 S, T の分散を求めよ。
 (3) 確率変数 X が正規分布 $N(67, 4^2)$ に従うとき、
 確率 $P(66 \leq X \leq 69), P(X \leq 64)$ を求めよ。

● $aX + b$ の平均、分散、標準偏差

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

$$V(aX + b) = a^2 V(X)$$

$$\sigma(aX + b) = |a| \sigma(X)$$

● 正規分布と標準正規分布

確率変数 X が正規分布

$N(m, \sigma^2)$ に従うとき、

$$Z = \frac{X - m}{\sigma} \text{ とすると、}$$

確率変数 Z は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う。

柱

例題 334 1個のさいころを720回投げるとき、1の目が出る回数を X とする。

- (1) X の平均、分散、標準偏差を求めよ。
 (2) $X \geq 130$ となる確率を、正規分布表を用いて求めよ。★★

例題 335 ある県の高校生の通学時間について、母平均45分、母標準偏差8分の母集団を考える。この中から144人を無作為に選び、その標本平均を \bar{X} とする。 \bar{X} が43以上46以下となる確率を求めよ。★★

*336 (1) ある市で、男子高校生100人を無作為抽出して身長を調べたところ、平均は171.6cm、標準偏差は5.0cmであった。この市の男子高校生の平均身長を、信頼度95%で推定せよ。また、信頼度99%で推定せよ。★

例題 (2) ある製品を100個無作為抽出したところ、10個が不良品であった。全製品における不良品の比率を信頼度95%で推定せよ。★

A

337 (1) ある工場で作った製品を無作為抽出し、その長さを測ったところ、平均が65cm、標準偏差が0.75cmであった。この製品の平均の長さを信頼度95%で推定するとき、信頼区間の幅が1mm以内となるのは、製品をいくつ以上抽出しているときか。★★

* (2) 1枚の硬貨を n 回投げて、表が出る回数を X とする。ただし、 $n \geq 100$ とする。 $\left| \frac{X}{n} - \frac{1}{2} \right| \leq 0.005$ となる確率を0.97以上とするには、 n をおよそいくら以上にすればよいか。★★

* **338** ある大学で500点満点の入学試験を行った。受験者の得点の平均点は260点、標準偏差は60点であった。受験者の総数は6000人で、得点の分布は正規分布とみなせるとき、次の問いに答えよ。

- (1) 確率変数 X について、平均を m 、標準偏差を σ とするとき、 $T = 50 + \frac{X-m}{\sigma} \times 10$ で定まる確率変数 T を偏差値という。 T の平均と分散を求めよ。
- (2) この入学試験で偏差値が60以上となるためには、何点以上得点すればよいか。
- (3) 得点が290点の受験者は、受験者の中で上から約何番目と考えられるか。
- (4) 定員が1830人であるとき、合格最低点は約何点になるか。★★

例題 339 (1) 連続型確率変数 X のとり得る値の範囲が $1 \leq X \leq 3$ であり、その確率密度関数が $f(x) = 1 - |x-2|$ と表されている。

- (ア) X の平均 $E(X)$ と分散 $V(X)$ を求めよ。
- (イ) 確率が $P(2-c \leq X \leq 2+c) = 0.5$ となる実数 c を求めよ。

例題 (2) n を自然数とする。いま、箱の中に赤玉と白玉が1:1の割合で入っている。この箱から無作為に玉を1個取り出し、その玉を箱に戻すという試行を n 回繰り返すとき、 Y_i ($i=1, 2, \dots, n$)を i 回目の試行の結果が赤玉である場合に1を、白玉である場合に0をとる確率変数とする。

- (ウ) 確率変数 $T = 1 \times Y_1 + 2 \times Y_2 + \dots + n \times Y_n$ について、 T の平均 $E(T)$ と標準偏差 $\sigma(T)$ を n の式で表せ。
- (エ) 上記の(ウ)において、 $n=24$ とする。 T が近似的に正規分布に従うことを用いて、 $T \geq 220$ となる確率を求めよ。(横浜市立大)★★★

B

* **340** 花子さんは、マイクロプラスチックと呼ばれる小さなプラスチック片(以下、MP)による海洋中や大気中の汚染が、環境問題となっていることを知った。花子さんたち49人は、面積が50a(アール)の砂浜の表面にあるMPの個数を調べるため、それぞれが無作為に選んだ20cm四方の区画の表面から深さ3cmまでをすくい、MPの個数を研究所で教えてもらうことにした。そして、この砂浜の1区画あたりのMPの個数を確率変数 X として考えることにした。このとき、 X の母平均を m 、母標準偏差を σ とし、標本49区画の1区画あたりのMPの個数の平均値を表す確率変数を \bar{X} とする。花子さんたちが調べた49区画では、平均値が16、標準偏差が2であった。

- (1) 砂浜全体に含まれるMPの全個数 M を推定することにする。花子さんは、次の方針で M を推定することとした。

方針：砂浜全体には20cm四方の区画が125000個分あり、 $M = 125000 \times m$ なので、 M を $W = 125000 \times \bar{X}$ で推定する。

次のア~エに当てはまる m または σ を含んだ式を答えよ。確率変数 \bar{X} は、標本の大きさ49が十分に大きいので、平均[ア]、標準偏差[イ]の正規分布に近似的に従う。そこで、方針に基づいて考えると、確率変数 W は平均[ウ]、標準偏差[エ]の正規分布に近似的に従う。

- (2) X の母標準偏差 σ は標本の標準偏差と同じ $\sigma=2$ と仮定すると、 M に対する信頼度95%の信頼区間は、[オ] $\times 10^4 \leq M \leq$ [カ] $\times 10^4$ となる。
- (3) 研究所が昨年調査したときには、1区画あたりのMPの個数の母平均が15、母標準偏差が2であった。今年の母平均 m が昨年とは異なるといえるかを有意水準5%で仮説検定する。ただし、母標準偏差は今年も $\sigma=2$ とする。まず、帰無仮説は「今年の母平均は[キ]である」であり、対立仮説は「今年の母平均は[ク]ではない」である。次に帰無仮説が正しいとすると、 \bar{X} は平均[ケ]、標準偏差[コ]の正規分布に近似的に従うため、

$Z = \frac{\bar{X} - \text{[ケ]}}{\text{[コ]}}$ は標準正規分布に近似的に従う。花子さんたちの調査結果から求めた Z の値を z とすると、標準正規分布において $P(Z \leq -|z|)$ と $P(Z \geq |z|)$ の和は[サ]なので、有意水準5%で今年の母平均 m は昨年と[シ]。ただし、[シ]は次の選択肢①、②から、当てはまる方を選べ。

- ① 異なるといえる ② 異なるとはいえない

(改 令和7年度大学入学共通テストの試作問題)★★★