公式

31．等差数列・等比数列

基本問題

262 (1) 初項が5，第9項が21である等差数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。また，数列$\{a_n\}$の初項から第50項までの和を求めよ。

(2) 公比が3，第5項が162である等比数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。また，数列$\{a_n\}$の初項から第6項までの和を求めよ。

●等差数列・等比数列

初項a，公差dの等差数列の一般項a_nは，

$a_n=a+(n-1)d$

初項a，公比rの等比数列の一般項a_nは，

$a_n=ar^{n-1}$

QR 和の公式

柱

*263 第10項が81，第25項が51の等差数列$\{a_n\}$がある。

例題 (1) 一般項a_nを求めよ。

例題 (2) 初項から第n項までの和をS_nとする。S_nが最大になるときのnとそのときのS_nの値を求めよ。 (広島工業大)★★

例題 *264 0でない2つの実数a，bに対し，a，2，bがこの順で等比数列であり，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{b}$，$\frac{1}{a}$がこの順で等差数列である。このとき，a，bの値を求めよ。

(改 神奈川大)★

考え方 3つの数x，y，zがこの順に等差数列$\Longleftrightarrow 2y=x+z$

0でない3つの数x，y，zがこの順に等比数列$\Longleftrightarrow y^2=xz$

例題 265 初項a_1，公比rが正の数である等比数列$\{a_n\}$について$a_2=6$，$a_5=48$が成り立っている。このとき，$a_1=\boxed{ア}$，$r=\boxed{イ}$である。したがって，$a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2+\cdots\cdots+a_n{}^2=\boxed{ウ}$となる。$b_n=a_na_{n+1}$とすると数列$\{b_n\}$も公比$\boxed{エ}$の等比数列となり，$b_1+b_2+b_3+\cdots\cdots+b_n=\boxed{オ}$である。

(同志社大)★★

A

例題 *266 初項から第7項までの和が3，初項から第14項までの和が18である等比数列がある。この等比数列の公比をrとすると，$r^7=\boxed{ア}$である。また，初項から第21項までの和は$\boxed{イ}$であり，第22項から第28項までの和は$\boxed{ウ}$である。 (甲南大)★★

例題 267 1以上50以下の5を分母とする既約分数の総和を求めよ。(昭和薬科大)★★

268 等比数列a_1，a_2，a_3，$\cdots\cdots$の初項から第3項までの和は35，初項から第6項までの和は315である。この等比数列の初項から第n項までの積が50桁以上の数となる最小のnを求めよ。ただし，$\log_{10}5=0.7$とし，公比は実数とする。

(山形大)★★

例題 *269 4で割った余りが2であり，5で割った余りが3であるような自然数を小さい方から順に並べて，a_1，a_2，a_3，$\cdots\cdots$，a_n，$\cdots\cdots$とする。$a_1=\boxed{ア}$，$a_2=\boxed{イ}$，$a_3=\boxed{ウ}$である。一般に，a_nをnを用いて表すと，$a_n=\boxed{エ}$と表される。和$a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n$が4桁の数となるような$n$の最小値は$\boxed{オ}$，最大値は$\boxed{カ}$である。 (関西大)★★★

解説動画

B

例題 270 数列$\{a_n\}$を初項3，公比3の等比数列とし，数列$\{b_n\}$を初項11，公差8の等差数列とする。$\{a_n\}$と$\{b_n\}$に共通に含まれる項を小さいものから順に並べて得られる数列$\{c_n\}$の一般項を求めよ。 (島根大)★★★★

公式

32. いろいろな数列

基本問題

例題 **271** (1) 次の和を求めよ。

(i) $\sum_{k=1}^{n}(k^2-3k+5)$　　(ii) $\sum_{k=1}^{n-1}4^k$

(iii) $\sum_{k=1}^{n}(2k^3+3k^2)$

(iv) $1\cdot1+2\cdot3+3\cdot5+4\cdot7+\cdots\cdots+50\cdot99$

例題 (2) 数列 1, 5, 11, 19, 29, 41, ……の一般項を求めよ。

●和の公式

$\sum_{k=1}^{n}c=cn$ (c は定数)

$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1)$

$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

$\sum_{k=1}^{n}k^3=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$

柱

272 次の和を求めよ。

例題 (1) $\frac{1}{1\cdot4}+\frac{1}{4\cdot7}+\frac{1}{7\cdot10}+\cdots\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$ ★

(2) $\sum_{k=1}^{400}\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$ (明治大)★

例題 (3) $1\cdot(n-1)^2+2\cdot(n-2)^2+3\cdot(n-3)^2+\cdots\cdots+(n-2)\cdot2^2+(n-1)\cdot1^2$
(ただし, $n\geqq2$) (近畿大)★★

例題 **273** $S_n=1+2\cdot\frac{1}{3}+3\left(\frac{1}{3}\right)^2+4\left(\frac{1}{3}\right)^3+\cdots\cdots+n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ を n の式で表せ。

(中央大)★★

考え方 (等差数列)×(等比数列) の形をした数列の和 $S \to S-rS$ を利用 (r は公比)

例題 **274** 数列 $\{a_n\}$ の a_1 から a_n までの和 S_n について $S_n=2n^3-14n^2-28n$ のとき, 一般項 a_n は $a_n=$ $\boxed{ア}$ である。また, $a_n<0$ を満たす自然数 n は $\boxed{イ}$ 個あり, そのような a_n についてそれらの和は $\boxed{ウ}$ である。 (改 関西学院大)★★

例題 **275** 数列 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5},$ ……について,

(1) $\frac{1}{101}$ は第何項か。また, $\frac{21}{32}$ は第何項か。

(2) 分母が同じ項を1つの群と考える。例えば $\frac{3}{5}$ は第4群の数である。このとき, 第 m 群の数の総和を求めよ。 ★★

A

276 次の和を求めよ。

*(1) $\frac{1}{1}+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\cdots\cdots+\frac{1}{1+2+3+\cdots\cdots+n}$ (改 関西大)★★

例題 (2) $\frac{1}{1\cdot3\cdot5}+\frac{1}{3\cdot5\cdot7}+\frac{1}{5\cdot7\cdot9}+\cdots\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}$

(同志社大)★★

例題 **277** 第 n 項が $a_n=2n-1$ ($n=1, 2, 3, \cdots\cdots$) である数列 $\{a_n\}$ を, 下のように a_1, a_2 を第1群, a_3, a_4, a_5, a_6 を第2群, a_7, a_8, a_9, ……, a_{14} を第3群, ……とし, 第 m 群が 2^m 個の項を含むように区分する。

1, 3 | 5, 7, 9, 11 | 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27 | 29, ……

(1) 第 m 群の最後の項を求めよ。

(2) 第 m 群に含まれる項の総和を求めよ。

(3) 2003 は第 k 群の先頭から p 番目の項であるとして, k および p を求めよ。

(岩手医科大)★★★

278 数列 $\{a_n\}$ を $a_n=[\sqrt{n}]$ ($n=1, 2, 3, \cdots\cdots$) とする。ただし, $[x]$ は実数 x を超えない最大の整数を表すとする。例えば, $a_2=[\sqrt{2}]=1$, $a_4=[\sqrt{4}]=2$ となる。$a_n=2$ となる項は全部で $\boxed{ア}$ 個ある。k を自然数とするとき, $a_n=k$ となる項は全部で $\boxed{イ}$ 個ある。$a_n\leqq k$ を満たすすべての項の和を W_k とすると, $W_k=$ $\boxed{ウ}$ である。 (大阪工業大)★★★ 解説動画

B

例題 **279** 座標平面上で, 点 (x, y) を考える。ここで, x, y を 0 以上の整数, n を自然数とする。このとき, 以下の個数を n で表せ。 解説動画

(1) $x+y\leqq n$ を満たす点 (x, y) の個数

(2) $\frac{x}{2}+y\leqq n$ を満たす点 (x, y) の個数

(3) $x+\sqrt{y}\leqq n$ を満たす点 (x, y) の個数 (中央大)★★★★

▶総合演習 p.90 問題31

公式

33. 漸 化 式

基 本 問 題

280 次のように定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ。

例題 (1) $a_1=2,\ a_{n+1}=a_n+3$

例題 (2) $a_1=3,\ a_{n+1}=3a_n$

例題 (3) $a_1=1,\ a_{n+1}=a_n+n^2$

例題 (4) $a_1=4,\ a_{n+1}=3a_n+2$

●$a_{n+1}-a_n=f(n)$ 型
$n\geqq 2$ のとき,
$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}f(n)$

●$a_{n+1}=pa_n+q\ (p\neq 1)$ 型
$\alpha=p\alpha+q$ を解いて,
$a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha)$
と変形する。

柱

例題 **281** 数列 $\{a_n\}$ が $a_1=3,\ a_{n+1}=2a_n+3^{n+1}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ を満たすとき,一般項 a_n を求めよ。 (信州大)★

例題 **282** 数列 $\{a_n\}$ を $a_1=3,\ a_{n+1}=\dfrac{a_n}{a_n+1}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ により定める。$\{a_n\}$ の一般項を求めよ。 (三重大)★★

例題 **283** 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする。$S_n=4n-a_n$ が成り立つとき,この数列の一般項 a_n を求めよ。 (福岡大)★★

例題 **284** 数列 $\{a_n\}$ が $a_1=2,\ \sqrt{2}\,a_{n+1}{}^5=a_n{}^6\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ を満たすとする。このとき,a_n を n を用いて表せ。 (改 中央大)★★

考え方 漸化式に $a_{n+1}{}^5$ などの累乗が含まれる場合や,a_n に $\sqrt{\ }$ がついている場合には,両辺の対数をとるとうまくいくことが多い。

A

例題 **285** $a_1=4,\ a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n-2n+1\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ に対して,$b_n=a_{n+1}-a_n$ とおく。数列 $\{b_n\}$ の一般項は $b_n=\boxed{ア}$ である。これより,数列 $\{a_n\}$ の一般項は $a_n=\boxed{イ}$ である。 (福岡大)★★

例題 **286** $a_1=1,\ a_2=2,\ a_{n+2}-4a_{n+1}-21a_n=0$ で定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。 (四日市大)★★

例題 **287** 次の条件を満たす数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ。
$a_1=2,\ 3na_{n+1}=(n+1)a_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ (改 徳島大)★★★

例題 **288** 数列 $\{a_n\}$ が $a_1=4,\ a_{n+1}=\dfrac{4a_n+3}{a_n+2}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ で定められているとき,次の問いに答えよ。

(1) $b_n=\dfrac{a_n-3}{a_n+1}$ とおくとき,数列 $\{b_n\}$ の漸化式を求めよ。

(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。 (弘前大)★★★

B

例題 **289** 次の関係式で定まる 2 つの数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ がある。
$a_1=2,\ b_1=1,\ a_{n+1}=a_n+b_n,\ b_{n+1}=9a_n+b_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$
このとき,数列 $\{a_n+kb_n\}$ が等比数列となるように定数 k を決めると $k=\pm\boxed{ア}$ となる。また,数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めると,$a_n=\boxed{イ}$ となる。したがって,$S_n=\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\boxed{ウ}$ となる。 (広島国際大)★★★★

解説動画

▶総合演習　p.84 問題4,p.89 問題25

公式

34. 数学的帰納法，数列の総合問題

基本問題

290 n を自然数とする。次の等式，不等式を数学的帰納法を用いて証明せよ。

例題 (1) $1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2=\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

例題 (2) $3^n \geqq 1+2n$

●**数学的帰納法**

(Ⅰ) $n=1$ のとき成り立つことを示す。

(Ⅱ) $n=k$ のとき成り立つと仮定し，$n=k+1$ のとき成り立つことを示す。

柱

例題 **291** n は正の整数とする。$n>3$ のとき，不等式 $n!>2^n$ が成り立つことを数学的帰納法を用いて示せ。 （富山県立大）★★

292 一般項が $a_n=6^{n+2}+7^{2n+1}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ で表される数列 $\{a_n\}$ を考える。すべての自然数 n に対して，a_n が 43 で割り切れることを示せ。 （久留米大）★★

考え方 数学的帰納法を用いる。$n=k+1$ のときの式 $6^{(k+1)+2}+7^{2(k+1)+1}$ を，$n=k$ のときの仮定が利用できる形に変形する。

例題 **293** $a_1=\dfrac{1}{4}$，$a_{n+1}=\dfrac{3n+2}{n+2}\cdot\dfrac{1}{4-a_n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ で定義される数列 $\{a_n\}$ について，次の問いに答えよ。

(1) a_2，a_3，a_4 を求めよ。

(2) 一般項 a_n を推定し，それが正しいことを数学的帰納法を用いて証明せよ。

（広島市立大）★★

例題 **294** 数直線上を原点から出発し，次の規則で移動する点 P がある。

1 個のさいころを投げて，出た目が 5 以上の場合は，正の向きに 2 進み，出た目が 4 以下の場合は，正の向きに 1 進む。

さいころを n 回投げたとき，P の座標が偶数になる確率を a_n とする。

(1) a_1，a_2，a_3 を求めよ。

(2) a_{n+1} を a_n を用いて表せ。

(3) a_n を求めよ。 （福井大）★★

A

295 2 次関数 $f(x)=x^2-5$ に対し，数列 $\{x_n\}$ を次のように定める。

$x_1=3$，また $n\geqq 1$ に対して，$x=x_n$ における $y=f(x)$ のグラフの接線と x 軸との交点の x 座標を x_{n+1} とする。

(1) $n\geqq 1$ に対し，$x_{n+1}=\dfrac{{x_n}^2+5}{2x_n}$ が成立することを示せ。

(2) $n\geqq 1$ に対し，$\sqrt{5}<x_{n+1}<x_n$ であることを数学的帰納法により示せ。

（水産大）★★

***296** $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$ に対して，$(1+\sqrt{2})^n=a_n+b_n\sqrt{2}$ が成立するように，有理数の数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ が与えられている。

(1) a_{n+1} と b_{n+1} を，a_n と b_n で表せ。

(2) $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$ に対して，$(1-\sqrt{2})^n=a_n-b_n\sqrt{2}$ が成立することを数学的帰納法で証明せよ。

(3) $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ の一般項をそれぞれ求めよ。 （南山大）★★★

例題 **297** 硬貨を 1 枚投げ，表が出たときは 1 点，裏が出たときは 2 点を得る。この試行を n 回繰り返して得られた点の合計を 3 で割ったとき，余りが 0 となる確率を a_n，余りが 1 となる確率を b_n，余りが 2 となる確率を c_n とする。 解説動画

(1) a_1，b_1，c_1 を求めよ。 (2) a_2，b_2，c_2 を求めよ。

(3) a_{n+1} を b_n と c_n を用いて表せ。 (4) a_{n+1} を a_n を用いて表せ。

(5) a_n を n を用いて表せ。 （甲南大）★★★

B

例題 **298** 2 次方程式 $x^2-x-1=0$ の 2 つの解を α，β とおき，$a_n=\alpha^n+\beta^n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ とする。次の問いに答えよ。 解説動画

(1) a_1，a_2，a_3 を求めよ。

(2) $a_{n+2}-a_{n+1}-a_n=0$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ が成り立つことを証明せよ。また，各 a_n が正の整数であることを数学的帰納法で証明せよ。

（改 北海道教育大）★★★

▶総合演習 p.85 問題9，p.86 問題13

公式

35. ベクトルと内積

基本問題

例題 **299** (1) 1辺の長さが4の正三角形ABCについて，内積 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ と $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$ を求めよ。

例題 (2) $\vec{a}=(4,\ -3)$ と同じ向きの単位ベクトル $\vec{e}$ を成分で表せ。

(3) $\vec{a}=(-2,\ \sqrt{3})$，$\vec{b}=(3\sqrt{3},\ -1)$ のとき，$\vec{a}\cdot\vec{b}$ の値を求め，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。

例題 (4) $|\vec{a}|=\sqrt{3}$，$|\vec{b}|=2$，$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{5}$ のとき，$\vec{a}\cdot\vec{b}$，$|\vec{a}+\vec{b}|$ の値を求めよ。

●ベクトルの内積

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

(θ は $\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角)

$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

$\vec{a}\perp\vec{b} \Longleftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=0$

●内積と成分

$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ のとき，$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$

柱

例題 **300** (1) 2つのベクトル $\vec{a}=(k,\ 1)$，$\vec{b}=(3,\ k+2)$ が平行になるように，k の値を定めよ。 (高崎経済大)★

例題 (2) $|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=2$ で，$\vec{a}-\vec{b}$，$\vec{a}+6\vec{b}$ が垂直であるとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を求めよ。 (京都産業大)★

考え方 (1) $\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ のとき，　$\vec{a}\,/\!/\,\vec{b} \Longleftrightarrow \vec{b}=\ell\vec{a}$ となる実数 ℓ がある

例題 **301** $\vec{a}=(-4,\ 3)$，$\vec{b}=(3,\ 1)$ に対して，$|\vec{a}+t\vec{b}|$ を最小にする実数 t の値は $\boxed{ア}$ で，そのときの最小値は $\boxed{イ}$ である。また，このとき $\vec{a}+t\vec{b}$ と $\vec{b}$ とのなす角を θ とすると $\theta=\boxed{ウ}°$ である。 (立命館大)★

***302** △OAB において，$|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|=\left|\overrightarrow{OA}-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{OB}\right|=\sqrt{10}$，OB=3 であるとき，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\boxed{ア}$，OA$=\boxed{イ}$，AB$=\boxed{ウ}$ である。また，△OAB の面積は $\boxed{エ}$ となる。 (改 立命館大)★★

考え方 ウ……$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}|$ と考える。

A

***303** △ABC は点 O を中心とする半径1の円に内接し，$5\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}+4\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ を満たす。このとき，内積 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ の値は $\boxed{ア}$ であり，辺 AB の長さは $\boxed{イ}$ である。 (芝浦工業大)★★

***304** 2点 A(4, 0)，B(0, 2) と円 $x^2+y^2=25$ 上の点 P$(x,\ y)$ に対し，$k=\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}$ とおく。k の最大値および最小値を求めよ。 (改 埼玉大)★★★

305 点 O を原点とする座標平面において点 C を C$(2,\ 2\sqrt{3})$ とする。点 P は，$|\overrightarrow{CP}|=2\sqrt{3}$ を満たし，ベクトル $\vec{a}=(0,\ -1)$，$\vec{b}=(1,\ 0)$ に対して，$\overrightarrow{CP}\cdot\vec{a}=-3$，$\overrightarrow{CP}\cdot\vec{b}<0$ を満たす。このとき，点 P の座標と △OCP の面積を求めよ。 (福岡大)★★★ 解説動画

B

例題 **306** $\vec{a}$，$\vec{b}$ を平面上のベクトルとする。$3\vec{a}+2\vec{b}$ と $2\vec{a}-3\vec{b}$ がともに単位ベクトルであるとき，ベクトル $\vec{a}+\vec{b}$ の大きさ $|\vec{a}+\vec{b}|$ の最大値を求めよ。 (横浜市立大)★★★

▶総合演習　p.87 問題15