公式

26. 微分係数と導関数，接線の方程式

基本問題

例題 **219** (1) 関数 $f(x)=x^3$ の $x=2$ における微分係数を定義に従って求めよ。

(2) 次の関数を微分せよ。

例題 (i) $f(x)=x^4+2x^3+x+1$

例題 (ii) $f(x)=(x+4)^3$

例題 (3) 曲線 $y=x^3+2x$ 上の点 $(1,\ 3)$ における接線の方程式を求めよ。

●x^n の微分

$(x^n)'=nx^{n-1}$

k が定数なら，$(k)'=0$

●接線の方程式

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における接線の方程式は，

$y-f(a)=f'(a)(x-a)$

柱

例題 **220** *(1) 点 $(1,\ 1)$ を通り，曲線 $y=x^3-4x+5$ に接する直線の方程式を求めよ。

（愛媛大）★

例題 (2) $t>0$ とするとき，曲線 $C:y=x^2$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$ における C の法線 (P を通り，P における C の接線と直交する直線) は，点 $(-2,\ 4)$ を通るという。そのとき，t の値をすべて求めよ。

（小樽商科大）★★

考え方 (1) 曲線 $y=f(x)$ 上にない定点を通る接線は，接点の座標を $(a,\ f(a))$ とおいて考える。

例題 **221** 曲線 $C:y=x^3-3x^2-9x+8$ の $x=0$ における接線の方程式を求めよ。また，この接線と平行な，曲線 C に関するもう 1 つの接線の接点の座標を求めよ。

（日本工業大）★

222 座標平面上において，直線 $y=kx-11$ が曲線 $y=x^3-2x^2+5x-3$ と接するとき，$k=$ $\boxed{ア}$ であり，接点の座標は $\boxed{イ}$ である。また，接点と異なる交点の座標は $\boxed{ウ}$ である。

（近畿大）★★

A

例題 **223** xy 平面上に 2 つの曲線 $y=x^3+3$，$y=x^3-1$ がある。この 2 つの曲線のどちらにも接する直線の方程式を求めよ。

（明治大）★★

例題 **224** 2 曲線 $y=2x^3+2x^2+a$，$y=x^3+2x^2+3x+b$（a，b は定数）が接していて，接点における接線が点 $(2,\ 15)$ を通るとき，a，b の値と接線の方程式を求めよ。

（明治大）★★

225 4 次曲線 $C:y=f(x)=x^4-4x^2$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$ における接線 ℓ が P 以外の 2 点で C と交わるような実数 t の範囲を求める。接線 ℓ の方程式は $\boxed{ア}$ である。したがって，4 次曲線 C と接線 ℓ との共有点の x 座標が満たす方程式は $\boxed{イ}$ となる。このうち，交点の x は $x \neq t$ であるから，方程式 $\boxed{ウ}$ を満足する。したがって，求める実数 t の範囲は $\boxed{エ}$ となる。

（明治薬科大）★★

B

***226** 放物線 $y=x^2-1$ 上にない点 $(a,\ b)$ から，$y=x^2-1$ に接線を引くとする。このとき，接線を 2 本引くことができるための必要十分条件は a と b を用いて表すと，$\boxed{ア}$ であり，この 2 本の接線が垂直に交わるとき，$b=$ $\boxed{イ}$ である。

（改 立命館大）★★★

解説動画

公式

27．関数の値の変化，最大・最小

基本問題

例題 **227** (1)　関数 $y=x^3-3x^2-24x$ の極値を求め，グラフをかけ。

例題 (2)　関数 $y=-3x^4+4x^3+12x^2-2$ の極値を求め，グラフをかけ。

例題 (3)　関数 $y=2x^3-9x^2+12x+3$ $(0\leqq x\leqq 3)$ の最大値，最小値を求めよ。

(4)　幅，高さ，奥行きがそれぞれ x，x，$5-2x$ の直方体の体積 V の最大値を求めよ。

●極大値, 極小値の求め方
関数 $f(x)$ の極値を求めるには，$f'(x)=0$ となる x の値を求め，増減表をかけばよい。
$f'(x)>0$ の区間では，$f(x)$ は増加し，
$f'(x)<0$ の区間では，$f(x)$ は減少する。

柱

例題 **228** 3 次関数 $f(x)=x^3+ax^2+bx$ が $x=3$ で極値 -27 をとるとき，定数 a，b の値を求めよ。　(改 高知大)★

考え方　$x=a$ で極値をとるならば $f'(a)=0$ であるが，その逆は成り立たない。増減表をかいて $x=a$ で極値をとるかどうかを確かめないといけない。

例題 **229** *(1)　関数 $f(x)=x^3+(k-9)x^2+(k+9)x+1$ (k は定数) が極値をもたないような k の値の範囲を求めよ。　(千葉工業大)★★

(2)　a を実数とする。関数 $f(x)=x^3-ax$ が区間 $-1<x<1$ において極値をとるような a の値の範囲を求めよ。　(改 早稲田大)★★

例題 **230** a は $a>0$ を満たす定数とする。関数 $f(x)=ax^3-3ax^2+b$ $(-2\leqq x\leqq 3)$ の最大値が 6，最小値が -14 のとき，定数 a，b の値を求めよ。　★★

A

231 関数 $f(x)=x^3-kx^2-k^2x$ が極大値 5 をもつような定数 k の値を求めよ。　(名城大)★★

***232** $0°\leqq\theta\leqq 180°$ の範囲で，θ の関数 $y=4\sin^3\theta+3\cos^2\theta+1$ の最大値と最小値，およびそのときの θ の値を求めよ。　(宮城教育大)★★

例題 ***233** 関数 $f(x)=x^3+3x^2+ax$ について，次の問いに答えよ。ただし，a は定数である。

(1)　$f(x)$ が極大値と極小値をもつような a のとりうる値の範囲を求めよ。

(2)　$f(x)$ が極大値と極小値をとるときの x の値をそれぞれ α，β $(\alpha<\beta)$ とする。$\alpha+\beta$ および $\alpha\beta$ を a で表せ。

(3)　$f(x)$ の極大値と極小値の和が 0 となるとき，a の値を求めよ。

(公立鳥取環境大)★★★

***234** 半径 1 の球に内接する高さ h，底面の半径 r，側面積 S の直円錐がある。　解説動画

(1)　r を h を用いて表せ。

(2)　S を h を用いて表せ。

(3)　S が最大となるときの h，r，S の値をそれぞれ求めよ。　(名城大)★★★

B

235 実数 a に対し，関数 $f(x)=ax^3-\dfrac{3}{2}(a^2+1)x^2+3ax$ とおく。ただし，$a\neq 0$ とする。　解説動画

(1)　$f(x)$ が極値をもたないような a の値を求めよ。

(2)　$f(x)$ の極大値が正で，極小値が負となるような a の値の範囲を求めよ。

(岐阜大)★★★

▶総合演習　p.91 問題32

公式

28. 方程式・不等式への応用

基本問題

236 (1) x の3次方程式 $x^3-3x-3=0$ の実数解の個数を求めよ。また，その実数解は，$2<x<3$ の範囲にあることを証明せよ。

例題 (2) $x>0$ のとき，次の不等式が成り立つことを証明せよ。

$$x^3-9x \geqq 3x-16$$

●方程式への応用
方程式 $f(x)=k$ の実数解は，関数 $y=f(x)$ のグラフと直線 $y=k$ の共有点の x 座標である。

●不等式への応用
$f(x) \geqq g(x)$ を示すには，$(f(x)-g(x)$ の最小値$) \geqq 0$ を示せばよい。

柱

例題 **237** (1) 方程式 $2x^3-12x^2+18x+k=0$ が異なる3つの実数解をもつための定数 k の値の範囲を求めよ。 （久留米大）★

(2) 座標平面において，直線 $y=4x+a$ と曲線 $y=x^3-6x^2+13x+2$ との共有点の個数を調べよ。 （東京理科大）★★

考え方 文字定数を分離して考える。

*__238__ 不等式 $x^4-\dfrac{4}{3}x^3-4x^2+k>0$ がすべての実数 x について成り立つような定数 k の値の範囲を求めよ。 ★★

例題 **239** 関数 $f(x)=x^3+2x^2-4x$ に対して，次の問いに答えよ。

(1) 曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線の方程式を求めよ。

(2) 点 $(0,\ k)$ から曲線 $y=f(x)$ に引くことができる接線の本数を，k の値によって調べよ。 （大阪市立大）★★

A

例題 **240** (1) x についての方程式 $\dfrac{2}{3}x^3-x^2-4x+3=k$ が異なる2つの負の解と1つの正の解をもつとき，定数 k の値の範囲を求めよ。

(2) t についての方程式 $\dfrac{2}{3}\cdot 5^{3t}-5^{2t}-4\cdot 5^t+3=k$ の実数解の個数が1つのとき，定数 k の値の範囲を求めよ。

(3) θ についての方程式 $\dfrac{2}{3}\sin^3\theta-\sin^2\theta-4\sin\theta+3=k$ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ の実数解の個数が2つのとき，定数 k の値の範囲を求めよ。 ★★

241 2つの関数を $f(x)=8x^2+16x-k$，$g(x)=2x^3+5x^2+4x$ とする。ただし，k は実数とする。 解説動画

(1) $-3 \leqq x \leqq 3$ の範囲の任意の x に対して，つねに，$f(x) \leqq g(x)$ となるための k の値の範囲を求めよ。

(2) $-3 \leqq x_1 \leqq 3$，$-3 \leqq x_2 \leqq 3$ の範囲の任意の x_1，x_2 に対して，つねに，$f(x_1) \leqq g(x_2)$ となるための k の値の範囲を求めよ。 （西南学院大）★★★

例題 **242** a を実数とする。3次方程式 $x^3+ax^2-a^2x-5=0$ が相異なる3つの実数解をもつような a の値の範囲を求めよ。 （学習院大）★★★

B

例題 **243** a を実数とし，関数 $f(x)=x^3-3ax+a$ を考える。$0 \leqq x \leqq 1$ において $f(x) \geqq 0$ となるような a の範囲を求めよ。 （大阪大）★★★★ 解説動画

▶総合演習 p.90 問題30

数単

公式

29. 積分の計算，定積分を含む関数

基本問題

244 次の不定積分，定積分を求めよ。

例題 (1) $\int(2x^2+3x-2)dx-\int(3x^2-7x+5)dx$

例題 (2) $\int(x^2+t)dt$　例題 (3) $\int_0^1(4x-1)^2dx$

例題 (4) $\int_{-2}^2(x^3+3x^2+5x+1)dx$

例題 (5) $\int_{-2}^3(x+2)(x-3)dx$

●定積分の計算
$f(x)$ の原始関数の1つを $F(x)$ とするとき，

$$\int_a^b f(x)dx=\Big[F(x)\Big]_a^b=F(b)-F(a)$$

●定積分の性質

$$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$$

など

QR 公式

柱

例題 245 (1) 関数 $f(x)$ が $f(x)=2x^2+3x+\int_0^{\frac{1}{2}}f(t)dt$ を満たすとき，$f(x)$ を求めよ。

（慶應義塾大）★

*(2) 等式 $f(x)=\int_0^1 x^2tf(t)dt+x+1$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。 ★★

考え方 (2) $\int_0^1 x^2tf(t)dt$ は t についての積分なので，$\int_0^1 x^2tf(t)dt=x^2\int_0^1 tf(t)dt$

246 (1) $\int_2^x(t^2+3t+1)dt$，$\int_x^1(t^3-t-1)dt$ をそれぞれ x で微分せよ。 ★

例題 *(2) 関数 $f(x)$ と定数 k が等式 $\int_3^x f(t)dt=2x^2-4x+k$ を満たすとき，

$f(x)=$ ア で，$k=$ イ である。 （神奈川大）★

例題 (3) 実数 t に対して，$f(t)=\int_0^t(x^2-5x+6)dx$ とおく。関数 $f(t)$ の極小値を求めよ。 （東京電機大）★★

例題 *247 (1) 定積分 $\int_{-2}^2(x+|x^2-1|)dx$ の値を求めよ。 （神奈川大）★★

例題 (2) a が $0\leqq a\leqq 3$ を満たす定数のとき，$\int_0^3|t-a|dt$ を求めよ。 ★★

考え方 絶対値の中の式が0以上，0以下となる区間に分けて計算する。

A

例題 248 2つの整式 $f(x)$，$g(x)$ と，それらの導関数 $f'(x)$，$g'(x)$ の間に $f(x)-g(x)=x^2$，$f'(x)+g'(x)=5x^2+x+1$，$g(0)=7$ が成り立つとき，$f(x)$ を求めよ。 （近畿大）★★

例題 *249 等式 $f(x)=\int_{-1}^1(x-t)f(t)dt+7$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

（立教大）★★

*250 d を実数の定数，$f(t)$ を2次関数として，次の関数 $F(x)$ を考える。

$$F(x)=\int_d^x f(t)dt$$

(1) $F(d)=$ ア ，$F'(x)=$ イ である。

(2) $F(x)$ が $x=1$ で極大値5，$x=2$ で極小値4をとるとき，$f(t)$ および d を求めよ。 （慶應義塾大）★★

251 t の関数 $S(t)$ を，$S(t)=\int_0^1|x^2-t^2|dx$ とする。このとき，$S(1)$ の値を求めよ。また，$0\leqq t\leqq 1$ における $S(t)$ の最大値と最小値，およびそのときの t の値を求めよ。 （長崎大）★★★

B

*252 a を実数とする。

解説動画

(1) 定積分 $\int_0^1|x^2-ax|dx$ を求めよ。

(2) この定積分の値を最小にする a の値と，そのときの定積分の値を求めよ。

（弘前大）★★★★

▶総合演習 p.88 問題21

数単

公式

30. 面　　積

基本問題

253 次の曲線や直線で囲まれた部分の面積を求めよ。

例題 (1) $y=-x^2+x+2\ (x\geqq 0)$，x 軸，y 軸，$x=3$

例題 (2) $y=2x^2+2x-4$，x 軸

例題 (3) $y=x^2+3x-1$，$y=x+2$

例題 (4) $y=x^2-x$，$y=-x^2+3x+4$

●面積

まず，曲線や直線の共有点の x 座標を求めて，グラフをかく。その後，グラフの上下関係に注意して定積分を計算する。

柱

例題 254 (1) 曲線 $C：y=-x^3+3x^2+3x-4$ と直線 $\ell：y=2x-1$ の共有点の x 座標を求めよ。また，曲線 C と直線 ℓ によって囲まれた部分の面積を求めよ。 ★

例題 (2) 曲線 $y=x^3-4x$ と，その曲線上の点 $(1,\ -3)$ における接線とで囲まれた部分の面積を求めよ。（南山大）★

例題 *255 関数 $f(x)=x^2-3x+2$ および座標平面上の曲線 $C：y=f(x)$ について，次の問いに答えよ。

(1) 点 $(2,\ -1)$ から曲線 C に異なる 2 本の接線が引ける。それぞれの接線の方程式と接点の座標を求めよ。

(2) 曲線 C と，(1)で求めた 2 本の接線によって囲まれた部分の面積 S を求めよ。（改 宮崎大）★★

例題 *256 xy 平面において，直線 $y=kx$ が，曲線 $y=x^2-4x$ と x 軸で囲まれる部分の面積 S を 2 等分するとき，$k=$ $\boxed{ア}$ であり，$S=$ $\boxed{イ}$ である。（関西学院大）★★

257 曲線 $y=|3x^2-6x|$ と直線 $y=3x$ で囲まれた部分の面積を求めよ。（久留米大）★★

A

例題 *258 xy 平面上の曲線 $C：y=|2x-1|-x^2+2x+1$ について

(1) 曲線 C の概形をかけ。

(2) 直線 ℓ が曲線 C と異なる 2 点において接するとき，ℓ の方程式を求めよ。

(3) (2)の直線 ℓ と曲線 C で囲まれた図形の面積 S を求めよ。（改 岡山大）★★

例題 259 放物線 $C：y=2x^2$ と，点 $(1,\ 5)$ を通り傾きが m である直線 ℓ について，次の問いに答えよ。

(1) C と ℓ が異なる 2 点で交わることを示せ。

(2) C と ℓ で囲まれた部分の面積 S を m の式で表せ。

(3) (2)の面積 S が最小となるとき，直線 ℓ の方程式を求めよ。

（東京電機大）★★★

*260 曲線 $C：y=x^3-x$ 上の点 $\mathrm{P}(a,\ a^3-a)$ における接線を ℓ とし，曲線 C と接線 ℓ の点 P 以外の共有点を Q とする。ただし，$a>0$ とする。 解説動画

(1) 点 Q の x 座標を a を用いて表せ。

(2) 曲線 C と接線 ℓ とで囲まれた部分の面積 S_1 を a を用いて表せ。

(3) 点 Q における曲線 C の接線を m とする。曲線 C と接線 m とで囲まれた部分の面積を S_2 とするとき，$\dfrac{S_2}{S_1}$ は a の値によらず一定であることを示せ。

（改 福岡教育大）★★★

B

例題 261 a を実数とし，$f(x)=x-x^3$，$g(x)=a(x-x^2)$ とする。2 つの曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ は $0<x<1$ の範囲に共有点をもつ。 解説動画

(1) a のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) $y=f(x)$ と $y=g(x)$ で囲まれた 2 つの部分の面積が等しくなるような a の値を求めよ。

（一橋大）★★★★

▶総合演習　p.84 問題3，p.85 問題5