

公式

21. 円と直線

基本問題

例題 174 (1) xy 平面上の 3 点 $A(0, 0)$, $B(1, -1)$, $C(-5, -5)$ を通る円 C の方程式を求めよ。

例題 (2) 円 $x^2 + y^2 = 10$ 上の点 $(1, -3)$ における接線の方程式を求めよ。

●円の接線の方程式

円 $x^2 + y^2 = r^2$ 上の点 (x_1, y_1) における接線の方程式は、

$$x_1x + y_1y = r^2$$

柱

175 (1) 中心の座標が $(1, 1)$ で、直線 $\ell: 2x - y - 11 = 0$ に接する円 C の半径を求めよ。また、 C と ℓ の接点の x 座標を求めよ。(名城大)★

例題 (2) xy 平面において、点 $(2, 1)$ を通り x 軸と y 軸に接する円の半径を求めよ。(京都産業大)★★

例題 176 (1) 点 $(2, -4)$ を通り、円 $x^2 + y^2 = 10$ に接する直線の方程式をすべて求めよ。★★

例題 (2) 円 $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 2$ 上の点 $(3, 2)$ における接線の方程式を求めよ。(改 名城大)★★

例題 177 円 $x^2 + y^2 = 1$ と直線 $2kx - y + k + 1 = 0$ が異なる 2 点 A, B で交わる。このとき、定数 k のとりうる値の範囲は $\boxed{\mathcal{P}}$ であり、また線分 AB の長さが $\sqrt{3}$ のとき、 k の値を求めると、 $k = \boxed{\mathcal{I}}$ である。(福岡大)★★

例題 178 座標平面上で、次の 2 つの円について考える。

$$C_1: x^2 + y^2 - 12x - 4y + 36 = 0, \quad C_2: x^2 + y^2 - 2ax - 2ay + a^2 = 0$$

ただし、 a は正の定数とする。2 つの円 C_1, C_2 が外接するときの a の値を求めよ。また、円 C_1, C_2 が内接するときの a の値を求めよ。

(改 神戸女学院大)★★

考え方 2 円の位置関係は、中心間の距離と半径を考えればよい。

A

***179** $a \neq 1$ とする。円 $C_1: x^2 + y^2 - 4ax - 2ay = 5 - 10a$, 円 $C_2: x^2 + y^2 = 10$, 円 $C_3: x^2 + y^2 - 8x - 6y = -10$ について、次の問いに答えよ。

(1) 円 C_1 が原点を通るとき、円 C_1 の中心と半径を求めよ。

例題 (2) 定数 a の値にかかわらず円 C_1 は定点 A を通る。この定点 A の座標を求めよ。

例題 (3) 円 C_2 と円 C_3 の 2 つの交点と原点を通る円の中心と半径を求めよ。(島根大)★★

例題 180 点 $A(1, 5)$ から円 $x^2 + y^2 = 13$ に引いた 2 本の接線の接点を結ぶ直線の方程式を求めよ。(日本福祉大)★★

***181** 直線 $y = \frac{3}{4}x - 2$ 上を動く動点 P と、円 $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$ の周上を動く動点 Q がある。このとき、線分 PQ の長さの最小値を求めよ。 (東京電機大)★★

B

182 次の 2 つの円 $x^2 + y^2 = 1$ ……①, $x^2 + y^2 - 2kx + 3k = 0$ ……②について、次の問いに答えよ。ただし、 k は定数とする。

例題 (1) ②が円の方程式を表すための k の値の範囲を求めよ。

例題 (2) $k = 4$ のとき、円①, ②の共通接線の方程式をすべて求めよ。(改 早稲田大)★★★

公式

22. 軌跡と領域

基本問題

183 (1) 2点 A(1, 5), B(5, 3) から等距離にある点 P の軌跡を求めよ。

(2) 2点 A(2, 0), B(-2, 0) に対して, 条件 $AP^2 + BP^2 = 10$ を満たす点 P の軌跡を求めよ。

例題 (3) 不等式 $(x+y-1)(x^2+y^2-2y-1) \geq 0$ の表す領域を図示せよ。

●軌跡

(i) 点 P の座標を (x, y) とし, P についての条件を x と y の式で表し, その式が表す図形を調べる。

(ii) (i) で求めた図形上のすべての点 P について, 与えられた条件が満たされるかどうかを調べる。

柱

例題 184 xy 平面上で, 2点 A(1, 0), B(3, 0) があり, 点 P は $AP:BP=1:2$ を満たして動く。このとき, P の描く軌跡は円であり, その中心の座標は $\boxed{ア}$, 半径は $\boxed{イ}$ である。(名城大)★

例題 185 (1) 点 Q が, 放物線 $y=x^2-2x+6$ 上を動くとき, 点 A(2, 3) と点 Q を結ぶ線分 AQ を $1:2$ に内分する点 P の軌跡を求めよ。(日本福祉大)★

例題 (2) xy 平面上に原点 O を中心とする半径 1 の円 C とその上の点 A(1, 0) がある。円 C 上を動く点 P に対して, 3点 O, A, P が三角形を作るとき, その三角形の重心を G とする。G の軌跡を求めよ。(改 広島大)★★

考え方 軌跡の方程式を求めた後, 除外点がないかどうか確認する。

*186 点 (x, y) が連立不等式 $\begin{cases} x+y \geq 2 \\ x^2+y^2 \leq 4 \end{cases}$ の表す領域 D を動くとき, 次の問いに答えよ。

例題 (1) $-2x+y$ の最大値, 最小値を求めよ。

例題 (2) $2x+y$ の最大値, 最小値を求めよ。

例題 (3) x^2+y^2-2x の最大値, 最小値を求めよ。(立命館大)★★

A

例題 187 直線 $\ell: y=k(x+1)$ および放物線 $C: y=x^2$ について次の問いに答えよ。ただし, k は実数である。

- (1) 直線 ℓ と放物線 C が異なる 2 点で交わるような k の値の範囲を求めよ。
- (2) k が (1) で求めた範囲を動くとき, ℓ と C の 2 つの交点の中点が描く軌跡を求め, xy 平面上に図示せよ。(青山学院大)★★

例題 188 (1) 不等式 $2|x|+3|y| \leq 6$ の表す領域を座標平面に図示せよ。

例題 (2) 「 $(x-1)^2+(y+1)^2 \leq r^2$ ならば $2|x|+3|y| \leq 6$ である」が成り立つような正の数 r の最大値を求めよ。(関西大)★★

*189 次の方程式で表される 2 つの直線 ℓ_1, ℓ_2 を考える。

$$\ell_1: (a-1)(x+1) - (a+1)y = 0, \quad \ell_2: ax - y - 1 = 0$$

例題 (1) ℓ_1 は a の値によらず定点を通る。この定点の座標を求めよ。

例題 (2) a が実数全体を動くときの, ℓ_1 と ℓ_2 の交点の軌跡を求めよ。(福島大)★★★

*190 a を実数とし, 直線 $y=2ax-a^2$ を ℓ_a とする。

- (1) ℓ_a が点 (2, -5) を通るとき a の値を求めよ。
- (2) どのような実数 a を選んでも, ℓ_a は点 (3, 10) を通らないことを示せ。

例題 (3) a がすべての実数を動くとき, ℓ_a が通る点 (x, y) の全体を S とおく。領域 S を図示せよ。(三重大)★★★

解説
動画

B

191 実数 x, y が $x^2+y^2 \leq 1$ を満たしながら変化するとする。

- (1) $s=x+y, t=xy$ のとき, 点 (s, t) の動く範囲を st 平面上に図示せよ。
- (2) 負でない定数 m をとるとき, $xy+m(x+y)$ の最大値を m を用いて表せ。

(改 東京工業大)★★★★

解説
動画

公式

23. 三角関数 (1)

基本問題

192 $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ で $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $\pi < \beta < \frac{3}{2}\pi$ で $\cos \beta = -\frac{12}{13}$ のとき, 次の値を求めよ。

例題 (1) $\sin(\alpha + \beta)$ (2) $\cos(\alpha + \beta)$ (3) $\tan(\alpha + \beta)$

例題 (4) $\sin 2\alpha$ (5) $\cos 2\alpha$ (6) $\tan 2\alpha$

●三角関数の加法定理

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

[QR] 公式

柱

例題 193 $y = 2\sin\left(3\theta - \frac{\pi}{2}\right)$ は, 周期 $\boxed{\text{ア}}$ π であるから, このグラフは $y = \sin \theta$ のグラフを, y 軸方向に $\boxed{\text{イ}}$ 倍し, θ 軸方向に $\boxed{\text{ウ}}$ 倍し, θ 軸方向に $\boxed{\text{エ}}$ π だけ平行移動したものである。ただし, 周期は正で最小のものを解答せよ。
また, $0 < \boxed{\text{エ}} < \frac{1}{2}$ とする。 (神戸女学院大)★

例題 194 (1) $\sin \frac{\pi}{12}$ と $\cos \frac{\pi}{8}$ の値を求めよ。★

例題 (2) 2 直線 $2x + y - 3 = 0$, $3x - y + 2 = 0$ のなす角 θ を求めよ。ただし, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ とする。 (改 広島工業大)★

例題 195 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ とする。 $\cos \theta + \sin \theta = \frac{1}{3}$ のとき, $\sin \theta \cos \theta$ の値は $\boxed{\text{ア}}$, $\cos \theta$ の値は $\boxed{\text{イ}}$, $\cos 2\theta + \sin 2\theta$ の値は $\boxed{\text{ウ}}$ である。 (北里大)★★

例題 196 (1) 次の等式を証明せよ。

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \{ \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) \}$$

(2) (1)の結果を用いて, $\sin \frac{\pi}{12} + \sin \frac{5}{12} \pi$ の値を求めよ。★★

考え方 (1) (積)→(和), (和)→(積)の公式は加法定理を用いて証明できる。

A

例題 197 k を実数の定数とする。2 次方程式 $3x^2 + \sqrt{6}x + k = 0$ について, 次の問いに答えよ。

- (1) この 2 次方程式が実数解をもつような k の値の範囲を求めよ。
- (2) θ を $0 \leq \theta \leq \pi$ を満たす定数とする。この 2 次方程式の 2 つの解が $2\cos \theta + \sin \theta$, $\cos \theta + 2\sin \theta$ のとき, $\cos \theta \sin \theta$ の値を求めよ。
- (3) (2) のとき, k の値を求めよ。 (改 高知大)★★

*198 実数 x, y が $0 < y < x < \frac{\pi}{2}$, $\cos x + \cos y = 1$, $\sin x + \sin y = \sqrt{2}$ を満たしているとき, 次の問いに答えよ。

- (1) $\cos(x - y)$ の値を求めよ。
- (2) $\cos x$, $\sin x$, $\cos y$, $\sin y$ の値を求めよ。 (日本女子大)★★

199 $\sin 1$, $\sin 2$, $\sin 3$, $\cos 1$ という 4 つの数値を小さい方から順に並べよ。
ただし, 1, 2, 3 は, それぞれ 1 ラジアン, 2 ラジアン, 3 ラジアンを表す。 (鹿児島大)★★

解説
動画

B

*200 n を自然数, θ を実数とすると, 次の問いに答えよ。

- (1) $\cos(n+2)\theta - 2\cos \theta \cos(n+1)\theta + \cos n\theta = 0$ を示せ。
- (2) $\cos \theta = x$ とおくと, $\cos 5\theta$ を x の式で表せ。
- (3) $\cos^2 \frac{\pi}{10}$ の値を求めよ。 (信州大)★★★★

解説
動画

公式

24. 三角関数 (2)

基本問題

201 $0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、次の方程式、不等式を解け。

例題 (1) $\cos 2\theta + \sin \theta - 1 = 0$

例題 (2) $\sin 2\theta = \sin \theta$

例題 (3) $\cos 2\theta + \sqrt{3} \sin \theta + 2 < 0$

例題 (4) $\sin \theta - \sqrt{3} \cos \theta < 0$

●三角関数を含む方程式、不等式

三角関数の種類が複数ある場合は、相互関係や2倍角の公式、合成などを用いて、三角関数の種類を統一する。

柱

例題 202 関数 $y = 3\sqrt{3} \sin^2 \theta + 2\sqrt{3} \cos^2 \theta + \sin \theta \cos \theta$ がある。 θ が $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ を満たすとき、次の問いに答えよ。

- (1) この関数を $y = a \sin 2\theta + b \cos 2\theta + c$ で表すと、 $a = \boxed{\text{ア}}$ 、 $b = \boxed{\text{イ}}$ 、 $c = \boxed{\text{ウ}}$ となる。ただし、 a 、 b 、 c は三角関数を含まない実数とする。
- (2) この関数の最大値は $\boxed{\text{エ}}$ であり、そのとき $\theta = \boxed{\text{オ}}$ である。また、最小値は $\boxed{\text{カ}}$ であり、そのとき $\theta = \boxed{\text{キ}}$ である。(慶應義塾大)★★

例題 203 $0 \leq x \leq 2\pi$ において、関数 $f(x) = \sqrt{2} \sin x - \sqrt{2} \cos x + 1 - 2 \sin x \cos x$ を考える。

- (1) $t = \sin x - \cos x$ とおく。 t のとりうる値の範囲を求めよ。
- (2) $f(x)$ を(1)で定義した t を用いて表せ。
- (3) $f(x)$ の最小値と最大値を求めよ。さらにそのときの x の値を求めよ。(関西大)★★

204 $0 \leq \theta \leq \pi$ のとき、 $f(\theta) = 3 \sin \theta - 2 \cos \theta$ の最大値、最小値を求めよ。(福島大)★★考え方 $f(\theta) = r \sin(\theta + \alpha)$ の形に変形して考える。 α の値は求まらないが、 $\sin \alpha$ 、 $\cos \alpha$ の値は求まる。

A

例題 205 関数 $y = \cos 2x - \sin x$ ($0 \leq x < 2\pi$) の最大値は $\boxed{\text{ア}}$ で、最小値は $\boxed{\text{イ}}$ である。与えられた実数 a に対して、方程式

$$\cos 2x - \sin x = a \quad (0 \leq x < 2\pi) \quad \cdots \cdots \text{①}$$

例題 の解が4個存在するのは $\boxed{\text{ウ}} < a < \boxed{\text{エ}}$ のときである。また、 $a = \boxed{\text{オ}}$ のときに限り、①の解は3個存在する。(東京理科大)★★206 $0 \leq x < 2\pi$ において、 $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$ を満たす x をすべて求めよ。(改 明治大)★★例題 207 点 $P(x, y)$ が原点 O を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円周上を動くとき、 $\sqrt{3}x + y$ の最小値は $\boxed{\text{ア}}$ であり、 $x^2 + 2xy + 3y^2$ の最大値は $\boxed{\text{イ}}$ である。(名城大)★★★例題 208 a を実数とする。 $y = 7 - \sin^2 x - 2a \cos x$ の最小値が a と等しくなるような a の値をすべて求めよ。(三重大)★★★

B

例題 209 (1) $\theta = 18^\circ$ に対して、 $\sin 2\theta = \cos 3\theta$ が成り立つことを示せ。

(2) 実数 α に対して、 $\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$ が成り立つことを示せ。

(3) 半径1の円に内接する正二十角形の面積を求めよ。(兵庫県立大)★★★

解説
動画

公式

25. 指数関数・対数関数

基本問題

210 次の計算をせよ。

例題 (1) $7 \times \sqrt[3]{3^5} \times \sqrt[6]{9} - 16^{\frac{3}{2}} + \sqrt[4]{81} \div \sqrt{25}$

例題 (2) $\frac{2^6}{3} \sqrt{\frac{9}{64}} + \frac{1}{2} \sqrt[3]{24}$

例題 (3) $\log_2 \sqrt[3]{12} - \log_4 6 + \log_8 \sqrt{\frac{3}{2}}$

例題 (4) $(\log_3 16 + \log \frac{1}{3} 4)(\log_{\sqrt{2}} 9 - \log_4 9)$
 (5) $9^{\log_3 4}$

●対数の計算

$$\log_a MN = \log_a M + \log_a N$$

$$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$$

$$\log_a M^r = r \log_a M$$

$$a^{\log_a M} = M$$

●底の変換公式

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

柱

211 次の方程式、不等式を解け。

例題 (1) $27^{x+1} = 9^{2x+3}$ (神奈川大)★

例題 (2) $\frac{1}{9^x} - \frac{6}{3^x} - 27 > 0$ (大阪経済大)★

例題 (3) $\log_3 x + \log_9 (4-x) = 1$ (龍谷大)★★

例題 (4) $-2(\log_2 x)^2 + 9 \log_8 2x < 1$ (福島大)★★

*212 次の数を、小さい方から順に並べよ。

例題 (1) $\sqrt[3]{5}, \sqrt[4]{8}, \sqrt{3}$ (広島工業大)★

例題 (2) $\frac{2}{3} + \log_8 7, 1.5, \log_2 3$ (改 上智大)★★

例題 213 (1) 関数 $y = -3 \cdot 4^x + 2^{x+3}$ の最大値とそのときの x の値を求めよ。★

例題 (2) $1 \leq x \leq 4$ のとき、 $y = 2(\log_2 x)^2 + 4 \log \frac{1}{4} (2x) + \log_2 64$ は、最大値 $\boxed{ア}$ をとる。また、 $x = \boxed{イ}$ で、最小値 $\boxed{ウ}$ をとる。(甲南大)★★

例題 214 $\log_{10} 2 = 0.3010$ とするとき、 $\log_{10} 5$ の値を求めよ。また、その結果を用いて、 $\left(\frac{1}{5}\right)^{60}$ は小数第何位に初めて 0 でない数字が現れるか答えよ。★

A

215 * (1) 連立方程式 $\begin{cases} \log_x y + 2 \log_y x = 3 \\ \log_x (y^2 + xy) = 2 \end{cases}$ の解を求めよ。(明治大)★★ 

例題 (2) $\log_{x^2+x+1} (2-x) < 0$ を満たす x の値の範囲を求めよ。(早稲田大)★★

例題 (3) x, y, z を実数とすると、2つの式 $2^x = 4^y = 8^z = a$, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 3$ を満たす実数 a の値を求めよ。(創価大)★★

例題 216 t の関数 $y = \frac{1}{4}(4^t + 4^{-t}) - \frac{a}{2}(2^t + 2^{-t} - 2) + \frac{1}{2}$ について、次の問いに答えよ。ただし、 a は定数とする。

(1) t の関数 $f(t) = 2^t + 2^{-t}$ の最小値を求めよ。

(2) $x = \frac{2^t + 2^{-t}}{2}$ とおくと、 y を x と a の式で表せ。

(3) y の最小値を求めよ。

(4) (3)で y の最小値が 0 となるときの a の値を求めよ。(改 神奈川大)★★★

例題 217 3^{2014} は $\boxed{ア}$ 桁の数であり、最も大きい位の数字は $\boxed{イ}$ 、一の位の数字は $\boxed{ウ}$ である。ただし、 $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$, $\log_{10} 7 = 0.8451$ とする。(上智大)★★★

B

例題 218 次の連立不等式の表す領域を図示せよ。

$$\begin{cases} \log_{\frac{x}{2}} y < 2 \\ xy < 16 \end{cases} \quad (\text{改 金沢大}) \text{★★★}$$