公式

11. 確　率 (1)

基本問題

例題 86 袋に赤玉3個，白玉4個が入っている。この袋から2個の玉を取り出すとき，次の確率を求めよ。

(1) 2個とも赤玉である確率

(2) 2個のうち少なくとも1個が赤玉である確率

(3) 2個の玉が同じ色である確率

●余事象の確率

$P(\overline{A})=1-P(A)$

●和事象の確率

$P(A\cup B)$

$=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

特に，A，B が排反事象であるとき，

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

柱

87 さいころを4回続けて投げる。出た目の和が7以上である確率を求めよ。

(愛媛大)★★

考え方 出た目の和が7以上になる場合より，6以下になる場合の方が少ない。このような場合は余事象の確率を考えると簡単になる場合が多い。

例題 88 4人で1回だけじゃんけんをする。ただし，あいこになった場合も1回と数える。

(1) 1人が勝つ確率を求めよ。

(2) あいこになる確率を求めよ。

(3) 勝つ人数の期待値を求めよ。 ★★

例題 89 さいころを2回投げ，出た目の数をそれぞれ a，b として，2次方程式 $x^2+ax+b=0$ を考える。この方程式が実数解をもつ確率は $\boxed{ア}$ である。また，この方程式が有理数の解をもつ確率は $\boxed{イ}$ である。 (福岡大)★★

考え方 さいころを2回投げる場合は，すべての場合を表に書き出す方法が有効。

A

例題 90 3個のさいころを同時に投げるとき，出る目の積が4の倍数である確率を求めよ。

(小樽商科大)★★

91 製品が40個あり，そのうち2個が不良品である。

(1) この40個の中から5個を同時に取り出したとき，1個以上の不良品が含まれる確率を求めよ。

(2) この40個の中から何個かを同時に取り出したとき，1個以上の不良品が含まれる確率を $\dfrac{1}{2}$ より大きくしたい。取り出す製品の最小個数を求めよ。

(弘前大)★★

例題 92 n 個のさいころを同時に投げる。n を2以上の自然数とするとき，次の確率を求めよ。

(1) 出る目の最小値が3である確率

(2) 出る目の最小値が3で，最大値が5である確率 ★★★

93 1つのさいころを4回投げる。さいころのそれぞれの目が出る確率が等しいとする。 解説動画

(1) さいころの目の出方は全部で何通りあるか。

(2) 複数回出る目が少なくとも1つある確率を求めよ。

(3) 1つの目が他のどの目よりも多く出る確率を求めよ。 (早稲田大)★★★

B

*94 1辺の長さが1の正六角形 ABCDEF の頂点から異なる3点を選び，これらを頂点とする三角形を作る。 解説動画

(1) 作られる三角形が正三角形となる確率を求めよ。

(2) 作られる三角形の面積の期待値を求めよ。 (奈良女子大)★★★★

▶総合演習　p.88 問題20

公式

12. 確 率 (2)

基 本 問 題

例題 95 5枚の硬貨を同時に投げるとき，次の問いに答えよ。

(1) 表が5枚出る確率を求めよ。

(2) 表が4枚，裏が1枚出る確率を求めよ。

(3) 裏が2枚以上出る確率を求めよ。

●反復試行の確率

1回の試行で事象 A の起こる確率を p とすると，独立な試行を n 回行って r 回 A が起こる確率は，

${}_n\mathrm{C}_r p^r (1-p)^{n-r}$

柱

例題 96 当たりくじ5本を含む20本のくじの中から，引いたくじはもとに戻さないで，1本ずつ2回続けてくじを引く。次の確率を求めよ。

(1) 1本目が当たる確率　(2) 2本目が当たる確率

(3) 2本とも当たる確率　(4) 1本だけ当たる確率　(改 関西学院大)★

例題 *97 A，Bの2つのチームで対戦を行い，先に3勝したチームを優勝とする。1回の試合でAが勝つ確率は $\frac{1}{3}$ とする。ただし，引き分けはなく，必ずAとBのいずれか一方の勝ちが決定するものとする。

(1) 4試合で優勝が決まる確率を求めよ。

(2) Aが優勝する確率を求めよ。　(東海大)★★

*98 赤玉が3個，白玉が2個入った袋の中から，A，Bの2人がこの順に玉を取り出す。Aは玉を1個取り出し，これが赤玉であればその玉をもとに戻し，白玉であればその玉はもとに戻さない。そのあと，Bが玉を同時に2個取り出す。

(1) Bが取り出した玉が2個とも赤玉である確率を求めよ。

(2) Bが取り出した玉が2個とも赤玉であるとき，Aの取り出した玉が白玉である条件付き確率を求めよ。　(職業能力開発総合大)★★

考え方 事象 A が起こったときに事象 B が起こる条件付き確率は，

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

A

例題 *99 1辺の長さが1の正方形の頂点を時計回りにA，B，C，Dとする。点Pは Aから出発し，硬貨を投げるたびに正方形の周上を時計回りに動く。1枚の硬貨を投げて，表が出たときにはPは2だけ進み，裏が出たときにはPは1だけ進む。硬貨を投げたときに，表と裏の出る確率は等しいとする。

(1) 硬貨を5回続けて投げたとき，PがAにいる確率を求めよ。

(2) 硬貨を10回続けて投げたとき，PがDにいる確率を求めよ。　(中央大)★★

例題 *100 ある病原菌の検査薬は，病原菌に感染しているのに誤って陰性と判断する確率が20%，感染していないのに誤って陽性と判断する確率が10%である。全体の20%がこの病原菌に感染している集団から1つの検体を取り出して，独立に2回，検査薬で検査する。このとき，次の確率を求めよ。

(1) 2回とも陰性であったが，実際には病原菌に感染している確率

(2) 少なくとも1回は陽性であったが，実際には病原菌には感染していない確率　(改 上智大)★★★

101 コインが5枚ある。さいころを振って出た目によって，これらのコインを1枚ずつ3つの箱A，B，Cのいずれかに入れていく。出た目が1であればコインを1枚，箱Aに入れる。出た目が2か3であればコインを1枚，箱Bに入れる。出た目が4か5か6であればコインを1枚，箱Cに入れる。さいころを5回振ったとき，次の問いに答えよ。　解説動画

(1) 箱Aと箱Bにコインがそれぞれちょうど2枚ずつ入っている確率を求めよ。

(2) A，Bいずれの箱にもコインが1枚以上入っている確率を求めよ。　(千葉大)★★★

B

例題 *102 n を5以上の整数とする。1枚の硬貨を投げる試行を n 回繰り返すとき，表が出る回数が，ちょうど n 回目の試行で5になる確率を p_n とする。

(1) p_n を n を用いて表せ。

(2) $\frac{p_{n+1}}{p_n}$ を n を用いて表せ。また，p_n の最大値を求めよ。　(改 佐賀大)★★★★

公式

13. 図形の性質

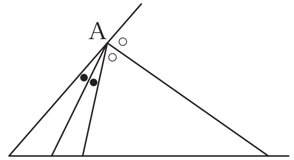
基本問題

例題 **103** △ABC において，$AB=12$，$BC=6$，$CA=9$ とし，∠A の二等分線と対辺 BC との交点を P とする。また，頂点 A における外角の二等分線と対辺 BC の延長との交点を Q とする。このとき，次の線分の長さを求めよ。

(1) 線分 PC

(2) 線分 PQ

●角の二等分線と比



上の図において，

$BP:PC=AB:AC$

$BQ:QC=AB:AC$

柱

例題 **104** △ABC の辺 AB を 1 : 2 に内分する点を M，辺 BC を 3 : 2 に内分する点を N とする。線分 AN と CM の交点を O とし，直線 BO と辺 AC の交点を P とする。△AOP の面積が 1 のとき，△ABC の面積 S を求めよ。

（岡山理科大）★

105 $\angle BAC=90°$ の直角三角形 ABC に円が内接している。この内接円は，辺 AB と点 D で，辺 BC と点 E で，辺 CA と点 F でそれぞれ接している。また，$AF=3$，$FC=7$ とする。このとき，直角三角形 ABC の 3 辺の長さの合計は $\boxed{ア}$ である。また，内接円の半径の長さは $\boxed{イ}$ である。さらに，$\angle DEB+\angle FEC=\boxed{ウ}$ である。

（西南学院大）★★

例題 **106** $AB=9$，$BC=12$，$CA=15$ の△ABC の外接円を O とする。辺 BC 上に点 P をとり，線分 AP の延長と円 O との交点を Q とし，Q における円 O の接線と辺 AB の延長との交点を R とする。

(1) 円 O の直径を求めよ。

(2) $BR=6$ のとき，線分 QR の長さを求めよ。

(3) $BP=9$ のとき，線分 PQ の長さを求めよ。

（西南学院大）★★

A

107 1 辺の長さが 4 である正八面体について，次の問いに答えよ。

(1) 表面積を求めよ。

(2) 体積を求めよ。

(3) 正八面体の隣り合う 2 面のなす角を θ とするとき，$\cos\theta$ の値を求めよ。

★★

***108** 鋭角三角形ABC において，頂点 A，B，C から各対辺に垂線 AD，BE，CF を下ろす。これらの垂線は垂心 H で交わる。

(1) 四角形 BCEF と AFHE が円に内接することを示せ。

(2) $\angle ADE=\angle ADF$ であることを示せ。

（東北大）★★

***109** 円周上に 4 点 A，B，C，D が反時計回りに並んでいる。直線 AB と直線 DC の交点を E，線分 AC と BD の交点を F とする。$AB=1$，$BE=3$，$AE=4$ であり，△DCF の面積は△ABF の面積の 4 倍である。$FA=x$，$FB=y$，$CE=t$，$\dfrac{y}{x}=u$ とおいて，以下の問いに答えよ。

(1) FC，FD を x，y で表せ。

(2) t の値を求めよ。

(3) u の値を求めよ。

(4) 面積の比の値 $\dfrac{\triangle AED}{\triangle ABF}$ を求めよ。

（名古屋工業大）★★★

B

例題 ***110** 1 辺の長さ 1 の正三角形 PQR の内接円 C_1 の中心を O_1 とする。円 C_1 と 2 辺 PQ，PR に接する円 C_2 の中心を O_2 とする。次に，円 C_1 と C_2 と辺 PR に接する円 C_3 の中心を O_3 とする。円 C_i の半径を r_i とする ($i=1,\ 2,\ 3$)。このとき，$r_1=\boxed{ア}$，$r_2=\boxed{イ}$ である。点 O_i から辺 PR に下ろした垂線と辺 PR との交点を H_i とする ($i=1,\ 2,\ 3$)。線分 H_1H_3，H_2H_3 の長さをそれぞれ l_1，l_2 とする。このとき，$l_1+l_2=\boxed{ウ}$，$l_1{}^2=\boxed{エ}r_1r_3$，$\dfrac{l_1}{l_2}=\boxed{オ}$，$r_3=\boxed{カ}$ である。

（上智大）★★★

解説動画

公式

14. 整　数 (1)

基本問題

111 $\sqrt{264n}$ が自然数となるような自然数 n のうち，最小の自然数は $\boxed{ア}$ であり，最大の 3 桁の自然数は $\boxed{イ}$ である。

●約数と倍数
素因数分解を利用すると，見通しがよくなることが多い。

柱

例題 **112** 正の整数 a，b $(a<b)$ について，a と b の最大公約数が 30 で，最小公倍数が 1800 であるような a，b の組は全部で何組あるか。 (金沢工業大)★★

例題 **113** m，n を自然数とする。
(1)　$30!$ が 2^m で割り切れるとき，最大の m の値は $\boxed{ア}$ である。
(2)　$125!$ は末尾に 0 が連続して $\boxed{イ}$ 個並ぶ。したがって，$n!$ が 10^{40} で割り切れる最小の n の値は $\boxed{ウ}$ である。 (立命館大)★★

例題 **114** 2 つの自然数 a と b が互いに素であるとき，$3a+b$ と $5a+2b$ も互いに素であることを証明せよ。 (改 山口大)★★

115 (1)　m が 3 の倍数でないならば，$(m+2)(m+1)$ が 6 の倍数であることを示せ。
(2)　m が奇数ならば，$(m+3)(m+1)$ が 8 の倍数であることを示せ。
(3)　$(m+3)(m+2)(m+1)$ が 24 の倍数でないならば，m が偶数であることを示せ。 (東北大)★

考え方　整数を余りによって分類して考える。正の整数 m に対して，どんな整数も
mk，$mk+1$，$mk+2$，……，$mk+(m-1)$ (k は整数)
のいずれかの形に分類される。

A

*__116__ $f(n)=(n-1)n(n+1)$，$g(n)=n^5-n$ とする。このとき，すべての整数 n に対して，$f(n)$ は 6 の倍数，$g(n)$ は 30 の倍数であることをそれぞれ証明せよ。 (長崎大)★★

*__117__ 整数 a に対して，a を 13 で割った余りを $r(a)$ $(0\leqq r(a)\leqq 12)$ で表すことにする。
(1)　整数 a，b に対して，$r(ab)=r(r(a)r(b))$ であることを示せ。
(2)　$r(2^3)$，$r(2^6)$，$r(2^{12})$ を求めよ。
(3)　$r(2^{2019})$ を求めよ。 (改 大阪府立大)★★★

例題 **118** 自然数 n の素因数分解が $n=p^aq^b$ で与えられている。a，b は正の整数，p，q は異なる素数である。
(1)　n の正の約数の個数を求めよ。
(2)　n 以下の自然数のうち，p の倍数の個数および pq の倍数の個数を求めよ。
(3)　n 以下の自然数のうち，n と互いに素であるものの個数は，
$n\left(1-\dfrac{1}{p}\right)\left(1-\dfrac{1}{q}\right)$ であることを証明せよ。 (改 西南学院大)★★★

*__119__ 2 以上の自然数 n に対し，n と n^2+2 がともに素数になるのは $n=3$ の場合に限ることを示せ。 (京都大)★★★ 解説動画

B

120 正の整数 x について，次の問いに答えよ。なお，ここで x の下 1 桁とは x を 10 で割った余りであり，x の下 2 桁とは x を 100 で割った余りとする。 解説動画
(1)　$10\leqq x\leqq 40$ の範囲で，x の下 1 桁と x^2 の下 1 桁が一致するような x の個数を求めよ。
(2)　$10\leqq x\leqq 99$ の範囲で，x^2 の下 1 桁と x^4 の下 1 桁が一致する x をすべて足した数を Y とする。整数 Y の下 1 桁を求めよ。
(3)　$10\leqq x\leqq 99$ の範囲で，x^2 の下 2 桁が x と等しいような x をすべて求めよ。 (中央大)★★★★

▶ 総合演習　p.87 問題18，p.92 問題38

公式

15. 整　数　(2)

基 本 問 題

例題 121 (1)　9991，9797 の最大公約数を求めよ。

例題 (2)　不定方程式 $52x-37y=1$ の整数解をすべて求めよ。

例題 (3)　等式 $3x+5y=48$ を満たす正の整数 x，y の組をすべて求めよ。

例題 (4)　3 進数 $2012_{(3)}$ を 10 進法で表すと $\boxed{ア}$，10 進数 118 を 2 進法で表すと $\boxed{イ}$，10 進数 1.52 を 5 進法で表すと $\boxed{ウ}$ である。

●ユークリッドの互除法
自然数 a，b $(a>b)$ について，a を b で割ったときの余りを r $(\neq 0)$ とするとき，
$(a$ と b の最大公約数$)$
$=(b$ と r の最大公約数$)$

●不定方程式の整数解
左の(2)のような問題は，まず特殊解を見つける。

柱

例題 122 (1)　m と n が自然数のとき，$mn+5m+6n=33$ を満たす m と n の組 $(m,\ n)$ をすべて求めよ。　(福岡大)★

例題 (2)　$\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{4}$ を満たす自然数の組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ。　(立教大)★★

例題 123　7 で割ると 5 余り，13 で割ると 8 余るような自然数のうち，3 桁のものは $\boxed{ア}$ 個ある。その中で最大のものは $\boxed{イ}$，最小のものは $\boxed{ウ}$ である。　(青山学院大)★★

例題 124　ある正の整数 n を 10 進法で表すと 2 桁になり，そのときの各位の数字の並びは，整数 $n+2$ を 6 進法で表したときの各位の数字の並びと逆順になる。このとき，n を 10 進法で表すと $\boxed{ア}$，n を 2 進法で表すと $\boxed{イ}_{(2)}$ である。　(東京慈恵会医科大)★★

例題 125　$\sqrt{n^2+60}$ が自然数となるような自然数 n をすべて求めよ。　(改 愛知工業大)★★

A

例題 126 (1)　a，b，c が整数で，$1\leqq a\leqq b\leqq c$ かつ $abc=a+b+c$ のとき，$ab\leqq 3$ であることを示せ。

(2)　$1\leqq a\leqq b\leqq c$ かつ $abc=a+b+c$ を満たす整数 a，b，c をすべて求めよ。　(東京女子大)★★

127　n，m は自然数で $n>m$ を満たすとする。

$n^3+m^3-nm^2-n^2m-62n+62m$

が 10 以下の素数となるような n，m の組をすべて求めよ。　(改 弘前大)★★

*128 (1)　方程式 $x^2-3xy+2y^2-1=0$ を満たす整数 x，y の組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ。

(2)　方程式 $x^2-xy+y^2-2x+1=0$ を満たす整数 x，y の組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ。　(広島工業大)★★★

*129 (1)　x を自然数とする。このとき，x^2 を 4 で割ったときの余りは，x が偶数のときは 0 であり，x が奇数のときは 1 であることを証明せよ。　解説動画

(2)　自然数の組 $(x,\ y)$ について，$5x^2+y^2$ が 4 の倍数ならば，x，y はともに偶数であることを証明せよ。

(3)　自然数の組 $(x,\ y)$ で $5x^2+y^2=2016$ を満たすものをすべて求めよ。　(慶應義塾大)★★★

B

130 (1)　a，b，c を整数とする。x に関する 3 次方程式 $x^3+ax^2+bx+c=0$ が有理数の解をもつならば，その解は整数であることを示せ。ただし，正の有理数は 1 以外の公約数をもたない 2 つの自然数 m，n を用いて $\dfrac{n}{m}$ と表せることを用いよ。　解説動画

(2)　方程式 $x^3+2x^2+2=0$ は，有理数の解をもたないことを背理法を用いて示せ。　(神戸大)★★★★

▶ 総合演習　p.89 問題27，p.91 問題35