公式

6．命題と集合

基本問題

例題 **43** (1)　次の空欄**ア**～**ウ**に当てはまるものを，下の(a)～(d)より選べ。ただし，x，y は実数とする。

$x=1$ は $x^2=x$ であるための $\boxed{ア}$。

$x<y$ は $x^2<y^2$ であるための $\boxed{イ}$。

$x^2+y^2=0$ は $x=y=0$ であるための $\boxed{ウ}$。

(a)　必要条件であるが，十分条件ではない

(b)　十分条件であるが，必要条件ではない

(c)　必要十分条件である

(d)　必要条件でも十分条件でもない

例題 (2)　次の命題の逆，対偶を述べよ。また，その真偽を答えよ。ただし，a，b は実数とする。

$a^2+b^2<2$ ならば，$a<1$ または $b<1$ である。

●必要条件と十分条件

命題「$p \Longrightarrow q$」が真であるとき，p は q であるための十分条件，q は p であるための必要条件であるという。

●逆，裏，対偶

命題「$p \Longrightarrow q$」の

逆：$q \Longrightarrow p$

裏：$\overline{p} \Longrightarrow \overline{q}$

対偶：$\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}$

命題とその対偶の真偽は一致する。

柱

44 整数を要素とする次の 2 つの集合において，$A\cap B=\{2,\ 7\}$ とする。

$A=\{-3,\ 2,\ a^2-9a+25,\ 2a+3\}$

$B=\{-2,\ a^2-4a-10,\ a^2-5a+1,\ a+6,\ 16\}$

(1)　$A\cup B$ を求めよ。　　(2)　$\overline{A}\cap B$ を求めよ。　　(釧路公立大)★

例題 **45** (1)　$\sqrt{3}$ は無理数であることを証明せよ。

例題 (2)　有理数 a，b，c，d に対して，$a+b\sqrt{3}=c+d\sqrt{3}$ ならば，$a=c$ かつ $b=d$ であることを示せ。　　(改 鳥取大)★★

考え方 (1)　無理数であることを直接示すのは難しい。無理数であることを証明するときは，背理法を用いる。

例題 **46** 次の命題の真偽を述べよ。また，真であるときは証明し，偽であるときは反例(成り立たない例)をあげよ。ただし，a，b，c は整数とする。

(1)　$a^2+b^2+c^2$ が偶数ならば，a，b，c のうち少なくとも 1 つは偶数である。

(2)　$a^2+b^2+c^2$ が 4 の倍数ならば，a，b，c のうち少なくとも 1 つは 4 の倍数である。　　(改 東北学院大)★★

考え方 (1)　直接示すことが難しい場合は，対偶を考えるとうまくいくことがある。

A

例題 **47** x を実数とし，a，b を正の定数とする。「$|2x-3|\leqq 4$」を条件 p，「$(x-1)^2\leqq a$」を条件 q，「$(x-b)^2\geqq 1$」を条件 r とする。このとき，p を満たす x の値の範囲は $\boxed{ア}$ である。p が q の十分条件であるとき，a のとりうる値の範囲は $\boxed{イ}$ である。p が r の十分条件であるとき，b のとりうる値の範囲は $\boxed{ウ}$ である。　　(東京都市大)★★

例題 **48** 次の空欄**ア**～**ウ**に当てはまるものを，下の(a)～(d)より選べ。ただし，a，b，x，y は実数とする。

(1)　a と b がともに有理数であることは，$a+b$ と ab がともに有理数であるための $\boxed{ア}$。

(2)　$b<0$ は 2 次方程式 $t^2+at+b=0$ が実数解をもつための $\boxed{イ}$。

(3)　$x+y$ が無理数であることは x が無理数かつ y が有理数であることの $\boxed{ウ}$。

(a)　必要条件であるが，十分条件ではない

(b)　十分条件であるが，必要条件ではない

(c)　必要十分条件である

(d)　必要条件でも十分条件でもない

((1) 上智大★★　(2) 東京慈恵会医科大★★　(3) ★★)

49 n を 1 以上の整数とするとき，$\sqrt{n}$ が有理数ならば，$\sqrt{n}$ は整数であることを示せ。　　(改 富山大)★★

B

*__50__ 2 つの整数の平方の和で表される整数の集合を A とする。

(1)　集合 A のある要素 a^2+b^2 (a，b は整数) が 3 で割り切れるとき，a，b はともに 3 で割り切れることを示せ。

(2)　x を整数とする。$9x$ が集合 A の要素であるとき，x は集合 A の要素であることを示せ。　　(熊本大)★★★

解説動画

公式

7. 三角比 (1)

基本問題

51 次の△ABC において，次のものを求めよ。

例題 (1) $A=45^\circ$，$B=30^\circ$，$a=4$ のとき，b

例題 (2) $A=120^\circ$，$a=\sqrt{3}$ のとき，外接円の半径 R

例題 (3) $b=8$，$c=7$，$C=60^\circ$ のとき，a と $\cos A$

例題 (4) $\tan A=\dfrac{4}{3}$ のとき，$\sin A$，$\cos A$

●正弦定理，余弦定理

$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=2R$

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

など。 QR 公式

●三角比の相互関係

$\sin^2 A+\cos^2 A=1$

$\tan A=\dfrac{\sin A}{\cos A}$

$1+\tan^2 A=\dfrac{1}{\cos^2 A}$

柱

例題 52 (1) $0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ のとき，方程式 $\sqrt{2}\cos^2\theta+3\cos\theta+\sqrt{2}=0$ を解け。

例題 (2) $0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ のとき，$-4\cos^2\theta-4\sin\theta+6$ の最大値と最小値，およびそのときの θ の値を求めよ。 （(1) 石巻専修大★ (2) 三重大★）

例題 53 $\dfrac{\sin A}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sin B}{\sqrt{7}}=\sin C$ が成り立っているとき，△ABC の内角のうちで最も大きい角の大きさを求めよ。 （改 明治薬科大）★★

考え方 正弦定理より，3 辺の長さの比を求める。3 辺の長さの比がわかれば，余弦定理より余弦を求めることができる。

例題 54 円に内接する四角形 ABCD において，AB＝3，BC＝7，CD＝5，DA＝5 とする。このとき，BD の長さを求めよ。また，四角形 ABCD の面積 S を求めよ。 （岡山理科大）★★

A

例題 55 辺 AB，辺 BC，辺 CA の長さがそれぞれ 12，11，10 の△ABC を考える。∠A の二等分線と辺 BC の交点を D とするとき，線分 AD の長さを求めよ。 （京都大）★★

例題 56 a を実数とする。3 辺の長さがそれぞれ $a-1$，a，$a+1$ となる三角形が存在するとき，a の値の範囲は $\boxed{ア}$ である。この三角形が鈍角三角形となる a の値の範囲は $\boxed{イ}$ である。 （改 同志社大）★★

57 △ABC において，AB＝AC＝1，∠ABC＝72° とする。辺 AC 上に，∠ABD＝∠CBD を満たす点 D をとる。

(1) ∠BDC を求めよ。

(2) 辺 BC の長さを求めよ。

(3) $\cos 36^\circ$ の値を求めよ。 （中央大）★★

*58 △ABC において，$a=7$，$b=4\sqrt{2}$，$c=5$ とすると，$\cos B=\boxed{ア}$ であり，△ABC の外接円の半径 R は，$R=\boxed{イ}$ である。また，∠ABC の二等分線と△ABC の外接円の交点で B と異なる点を D とする。このとき，AD＝$\boxed{ウ}$ であり，さらに△ABC の外接円の中心を O とすると，△AOD の面積は $\boxed{エ}$ となる。 （改 東京理科大）★★★ 解説動画

B

例題 59 △ABC において，BC＝a，CA＝b，AB＝c とおく。$(b-c)\sin^2 A=b\sin^2 B-c\sin^2 C$ が成り立つとき，次の問いに答えよ。

(1) $(b-c)a^2=b^3-c^3$ を示せ。

(2) △ABC はどんな三角形か。 （群馬大）★★★★

▶ 総合演習 p.86 問題11，p.92 問題40

数単

公式

8．三角比(2)

基本問題

60 1辺の長さが1である正四面体 ABCD において，辺 BC の中点を M とし，$\angle\text{AMD}=\alpha$ とする。

(1) 線分 AM，線分 DM の長さを求めよ。

(2) $\cos\alpha$ の値を求めよ。

(3) △AMD の面積を求めよ。

●三角比と空間図形
空間図形の場合も，どこか1つの三角形に注目して，正弦定理や余弦定理を用いることを考える。

柱

例題 **61** $\text{AB}=\sqrt{2}$，$\text{AC}=5\sqrt{2}$，$\angle\text{BAC}=60^\circ$ となる△ABC を考える。$\text{BC}=\boxed{\text{ア}}$ であり，△ABC の面積は $\boxed{\text{イ}}$ である。また，△ABC の内接円の半径は $\boxed{\text{ウ}}$ である。 （慶應義塾大）★

例題 **62** △ABC において，$\text{AB}=2$，$\text{AC}=3$，$\angle\text{BAC}=120^\circ$ のとき，△ABC の面積を求めよ。また，$\angle\text{BAC}$ の二等分線と辺 BC の交点を D とするとき，AD の長さを求めよ。 （東京慈恵会医科大）★

63 1辺の長さが6の正四面体 OABC において，頂点 O から平面 ABC に垂線 OH を下ろす。次の問いに答えよ。

(1) 点 H は△ABC の外心であることを示せ。

(2) 線分 AH の長さを求めよ。

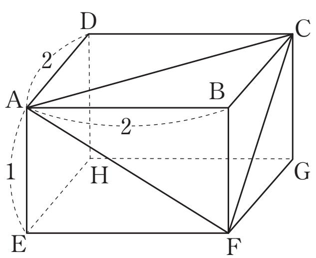
(3) 正四面体 OABC の体積 V を求めよ。 ★★

64 図のような直方体 ABCD－EFGH がある。

(1) $\cos\angle\text{AFC}$ の値を求めよ。

(2) △AFC の面積 S を求めよ。

(3) 頂点 B から△AFC に下ろした垂線 BI の長さ h を求めよ。 （改 成蹊大）★★



考え方 (3) 三角錐 B－AFC の体積に着目する。

A

***65** 1辺の長さが2の正四面体 OABC の辺 AB 上に点 P をとる。点 P が点 A，点 B を除く辺 AB 上を動くとき，線分 AP の長さを a とする。

(1) a のとりうる値の範囲は $\boxed{\text{ア}}<a<\boxed{\text{イ}}$ である。a を用いて，$\text{CP}^2=\boxed{\text{ウ}}$ と表される。

(2) △OCP において底辺を OC とするとき，高さ h は，$h=\boxed{\text{エ}}$ であるので，△OCP の面積 S は，$S=\boxed{\text{オ}}$ である。

(3) (2)より，S は $a=\boxed{\text{カ}}$ のときに最小値 $\boxed{\text{キ}}$ をとる。 （武庫川女子大）★★

66 半径 $4\sqrt{2}$ の球面 S 上に3点 A，B，C があり，線分 AB，BC，CA の長さはそれぞれ $\text{AB}=4\sqrt{6}$，$\text{BC}=10$，$\text{CA}=6$ とする。 解説動画

(1) $\cos\angle\text{ABC}=\boxed{\text{ア}}$ である。平面 ABC で球面 S を切った切り口の円を T とする。T の半径は $\boxed{\text{イ}}$ である。点 D が円 T 上を動くとき，△DAB の面積の最大値は $\boxed{\text{ウ}}$ である。

(2) 球面 S の中心 O から平面 ABC に下ろした垂線 OH の長さは $\boxed{\text{エ}}$ である。

(3) 点 E が球面 S 上を動くとき，三角錐 EABC の体積の最大値は $\boxed{\text{オ}}$ である。 （慶應義塾大）★★★

B

例題 **67** 1辺の長さが8の正方形 ABCD を底面とする四角錐 P－ABCD があり，辺 PA，PB，PC，PD の長さは12とする。 解説動画

(1) △PBC の面積を求めよ。

(2) 頂点 P から底面 ABCD へ下ろした垂線の交点を H とするとき，線分 PH の長さを求めよ。

(3) この四角錐に外接する球の半径を求めよ。

(4) この四角錐に内接する球の半径を求めよ。 （改 大阪経済大）★★★★

▶ 総合演習 p.89 問題28

公式

9．場合の数，順列

基本問題

例題 **68** 大人 A，B と子ども C，D，E の 5 人が 1 列に並ぶとき，次の並び方は何通りあるか。

(1) すべての並び方

(2) 大人が隣り合う並び方

(3) 大人が隣り合わない並び方

例題 (4) 少なくとも一方の端が子どもになる並び方

●順列

異なる n 個のものから r 個を取り出して 1 列に並べるときの並べ方の総数を ${}_nP_r$ と表す。

${}_nP_r=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots\times(n-r+1)$

柱

69 (1) 4 人がそれぞれ異なるプレゼントを 1 つずつ持ってパーティーに参加し，くじを引いてプレゼント交換を行う。どの人にも，自分の持ってきたプレゼントと異なるプレゼントが当たる場合の数は何通りあるか。

例題 (2) 男子生徒 A，B，C，D と女子生徒 E，F，G の 7 人が横 1 列に並ぶ。このとき，どの女子生徒も隣り合わない並び方は何通りあるか。

((1) 改 愛知医科大★★　(2) 改 北里大★★)

例題 **70** 男子 4 人，女子 2 人が 6 人用の円卓を囲んで等間隔に座るとき，

(1) 座り方の総数を求めよ。

(2) 女子 2 人が隣り合う座り方の総数を求めよ。

(3) 女子 2 人が向かい合う座り方の総数を求めよ。 (岡山理科大)★

例題 **71** 0，1，2，3，4，5，6 の 7 つの数字のうち異なる 4 つを並べて 4 桁の整数をつくる。次のような整数は全部で何個つくれるか。

(1) 4 桁の整数

(2) 4 桁の偶数

(3) 2022 より大きい整数 (京都女子大)★★

例題 **72** (1) 1200 の正の約数は何個あるか。また，そのうち偶数は何個あるか。

(2) 1200 の正の約数の総和を求めよ。

(3) 1200 の正の約数のうち，5 の倍数であるものの総和を求めよ。 ★★

考え方 1200 を素因数分解して考える。

A

例題 **73** C，O，M，P，U，T，E の 7 文字を全部使ってできる文字列を，アルファベット順の辞書式に並べる。

(1) 最初の文字列は何か。また，全部で何通りの文字列があるか。

(2) COMPUTE は何番目にあるか。

(3) 200 番目の文字列は何か。 (名城大)★★

例題 **74** 1 から 1000 までの整数のうち，2，3，5 の少なくとも 2 つで割り切れる数は $\boxed{ア}$ 個あり，また，2，3，5 の少なくとも 1 つで割り切れ，かつ 6 で割り切れない数は $\boxed{イ}$ 個ある。 (慶應義塾大)★★★

例題 **75** 5 個の数字 1，2，3，4，5 の中の異なる 3 個の数字を 1 列に並べて 3 桁の整数をつくる。次のような整数は何通りできるか。

(1) 3 桁の整数　(2) 偶数

(3) 3 の倍数　(4) 6 の倍数 (改 関西大)★★★

B

76 1 から 6 までの数が 1 つずつ書かれている 6 つの球を，3 つの袋 A，B，C に 2 つずつ入れる。このとき，次の条件を満たす入れ方の総数をそれぞれ求めよ。ただし，A，B，C において，入っている球に書かれた数のうち小さい方をそれぞれ a，b，c とおく。 解説動画

(1) a，b，c の中に 2 と等しくなるものがない。

(2) a，b，c の中に 3 と等しくなるものがある。

(3) a，b，c の中で最も大きいものが 3 と等しい。 (法政大)★★★★

▶ 総合演習　p.90 問題29

公式

10. 組　合　せ

基本問題

例題 77　男子4人，女子5人の中から4人の役員を選ぶとき，次のような選び方は何通りあるか。
(1)　すべての選び方
(2)　男子から2人，女子から2人を選ぶ。
(3)　特定の2人A，Bを含んだ4人を選ぶ。
(4)　女子から少なくとも1人を選ぶ。

●組合せ
異なる n 個のものから r 個を取り出して1組とするときの組の総数を ${}_nC_r$ と表す。

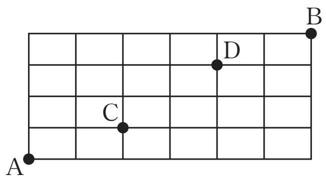
$${}_nC_r=\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r(r-1)\cdots\cdots 1}$$

柱

例題 *78　10人の学生を次のようにグループ分けする方法は何通りあるか答えよ。
(1)　7人，3人の2つのグループに分ける。
(2)　5人，3人，2人の3つのグループに分ける。
(3)　4人，3人，3人の3つのグループに分ける。
(4)　4人，2人，2人，2人の4つのグループに分ける。　（日本女子大）★★

考え方　グループに区別があるかないかを考える。グループに名前がついていない場合，同じ人数のグループは区別がつかないことに注意する。

例題 *79　右の図のような道がある街がある。AからBへ行く最短経路は $\boxed{\text{ア}}$ 通りあり，そのうち，Cを通るものは $\boxed{\text{イ}}$ 通りある。また，AからBへ行く最短経路のうち，Cを通りDを通らないものは $\boxed{\text{ウ}}$ 通りある。　（北里大）★★



*80　正十二角形の3つの頂点を結んでできる三角形の個数は $\boxed{\text{ア}}$ である。そのうち，正十二角形と2辺を共有する三角形の個数は $\boxed{\text{イ}}$ であり，正十二角形と1辺のみを共有する三角形の個数は $\boxed{\text{ウ}}$ である。よって，正十二角形と辺を共有しない三角形の個数は $\boxed{\text{エ}}$ である。また，正十二角形の3つの頂点を結んでできる直角三角形の個数は $\boxed{\text{オ}}$ である。　（摂南大）★★

例題 81　整数の組 $(x_1,\ x_2,\ x_3)$ について，$1\leqq x_1<x_2<x_3\leqq 6$ となるような組合せは $\boxed{\text{ア}}$ 通りあり，$1\leqq x_1\leqq x_2<x_3\leqq 6$ となるような組合せは $\boxed{\text{イ}}$ 通りある。
（早稲田大）★★

A

例題 *82　R，I，K，O，Uの5文字をすべて横1列に並べる。
(1)　RがIより左にある並べ方の総数を求めよ。
(2)　RがIより左にあり，かつ，KがOより左にある並べ方の総数を求めよ。
(3)　RがIより左にあるか，または，KがOより左にある並べ方の総数を求めよ。　（龍谷大）★★★

例題 83　方程式 $x+y+z=10$ を満たす x，y，z の0以上の整数解の組の総数は $\boxed{\text{ア}}$ 組であり，正の整数解の組の総数は $\boxed{\text{イ}}$ 組である。また，方程式 $x+y+4z=10$ を満たす x，y，z の0以上の整数解の組の総数は $\boxed{\text{ウ}}$ 組である。　（北里大）★★★

例題 84　A，B，C，Dの4人で，すべて種類の異なる果物 k 個を分ける。ただし，果物をもらえない者が現れる分け方についても，果物を4人で分けたと考える。　解説動画
(1)　$k=5$ のとき，果物の分け方は何通りあるか。
(2)　$k=6$ のとき，A，Bが0個，C，Dが少なくとも1個以上もらえる果物の分け方は何通りあるか。
(3)　$k=6$ のとき，A，B，C，Dの4人のうち，1人が0個，残りの3人は少なくとも1個以上もらえる果物の分け方は何通りあるか。
(4)　$k=9$ のとき，A，B，C，Dの4人のうち，1人が0個，残りの3人は少なくとも2個以上もらえる果物の分け方は何通りあるか。　（改 防衛医科大）★★★

B

例題 85　白玉が4個，黒玉が3個，赤玉が1個あるとする。これらを1列に並べる方法は $\boxed{\text{ア}}$ 通り，円形に並べる方法は $\boxed{\text{イ}}$ 通りある。さらに，これらの玉にひもを通し，輪を作る方法は $\boxed{\text{ウ}}$ 通りある。　（近畿大）★★★★　解説動画

▶ 総合演習　p.89 問題24