

公式

1. 式の計算, 式の値

基本問題

●展開, 因数分解

公式の利用や, 式の置き換え, 積の組合せの工夫を考えるとよい。

QR 公式

●平方根の計算

$\sqrt{k^2 a} = k\sqrt{a}$ ($k > 0$) や
分母の有理化を利用。

例題 1 (1) $(2x - y + z)^2$ を展開せよ。

例題 (2) $4x^2 - xy - 3y^2$ を因数分解せよ。

例題 (3) $8x^3 + 27$ を因数分解せよ。

例題 (4) $\frac{\sqrt{8} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$ を簡単にせよ。

柱

2 次の式を因数分解せよ。

例題 (1) $x^2 + ax - x + a - 2$ (京都産業大)★

例題 (2) $x^2 - xy - 6y^2 + 4x - 7y + 3$ (大阪経済大)★

例題 (3) $a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b)$ (摂南大)★★

考え方 最も次数の低い文字に着目して整理する。最も次数の低い文字が複数ある場合は、どれか1つの文字で整理する。

例題 *3 $x = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$ のとき, 次の式の値を求めよ。

(1) $x^2 + \frac{1}{x^2}$

(2) $x^3 + \frac{1}{x^3}$

(3) $x^4 - \frac{1}{x^4}$

(近畿大)★

例題 *4 $x + y + z = 4$, $xy + yz + zx = 2$, $xyz = 5$ のとき, $x^2 + y^2 + z^2$, $x^4 + y^4 + z^4$ の値をそれぞれ求めよ。(武庫川女子大)★★

A

5 次の式を因数分解せよ。

例題 (1) $2x^4 - 7x^2 - 4$ (鹿児島大)★

例題 (2) $(x^2 - x + 2)(x^2 - x - 8) - 56$ (広島修道大)★

例題 (3) $(x + 1)(x + 3)(x + 4)(x + 6) + 8$ (同志社女子大)★★

例題 (4) $x^4 - 18x^2 + 1$ (文教大)★★

例題 6 * (1) 次の2重根号をはずせ。

$\sqrt{27 - 7\sqrt{5}}$ (駒澤大)★★

例題 (2) 次の式を簡単にせよ。

$\sqrt{x^2 - 4x + 4} - \sqrt{x^2 + 6x + 9}$ (改 釧路公立大)★

例題 7 $a + b = 2\sqrt{2}$, $a^2 + b^2 = 10$ のとき, ab , $a^3 + b^3$, $a^5 + b^5$ の値を求めよ。(北里大)★★

例題 *8 $(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$ を展開せよ。
また, その結果を用いて, $a^3 - 6ab + 8b^3 + 1$ を因数分解せよ。

(改 関西学院大)★★★

B

9 $\sqrt{2}p^2 + \sqrt{3}q = \sqrt{5}$, $\sqrt{2}q^2 + \sqrt{3}p = \sqrt{5}$ ($p \neq q$) のとき, $p + q$, $p^2 + q^2$,

$\frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ の値を求めよ。

(札幌大)★★★



公式

2. 方程式と不等式

基本問題

10 次の方程式，不等式を解け。

例題 (1) $|2x+1|<7$

例題 (2) $2x^2+5x+2=0$

例題 (3) $3x^2-3x-1=0$

例題 (4) $\begin{cases} x^2-6x-16<0 \\ -x^2+3x-1<0 \end{cases}$

●絶対値を含む方程式・不等式

$a>0$ のとき，

$$|x|=a \longrightarrow x=\pm a$$

$$|x|<a \longrightarrow -a<x<a$$

$$|x|>a \longrightarrow x<-a, \ a<x$$

●2次不等式

2次関数のグラフをかくと考えるやすい。



柱

11 次の方程式，不等式を解け。

例題 (1) $7x+|x-2|=9$

(金沢工業大)★

例題 (2) $|4x-3|<2x+1$

(自治医科大)★

例題 (3) $2|x|+|x-1|=x+3$

(広島工業大)★★

例題 12 不等式 $ax+3>2x$ を解け。ただし， a は定数とする。

(広島工業大)★★

考え方 文字係数の不等式は，文字係数の符号に注意する。

例題 13 $x>y$ のとき，連立方程式 $\begin{cases} x+y=\sqrt{5} \\ x^2+y^2=3 \end{cases}$ を解け。

(甲南大)★★

A

例題 14 2つの不等式 $|x-6|<3$ ……①， $|x-k|<5$ ……② がある。ただし，定数 k は実数とする。

(1) ①，②をとともに満たす実数 x が存在するような k の値の範囲を求めよ。

(2) ①，②をとともに満たす x が整数のとき，解の数が3つとなるような k の値の範囲を求めよ。
(改 國學院大)★★

例題 15 a を定数とする。2つの2次方程式 $2x^2-ax-(2a+2)=0$ ，

$x^2-(a+2)x+(a+7)=0$ の共通解が1つだけあるとき，その共通解は $\boxed{ア}$ であり， $a=\boxed{イ}$ である。
(慶應義塾大)★★

16 $x\geq-6$ の範囲のすべての x に対して不等式 $2ax\leq 6x+1$ が成り立つための a の条件を求めよ。
(改 上智大)★★★★

解説動画

B

*17 次の問いに答えよ。ただし， $[x]$ は x を超えない最大の整数を表す。

(1) $[2x]=4$ を満たす実数 x の範囲を求めよ。

(2) $[2x-1]=4x$ を満たす実数 x をすべて求めよ。

(3) $[2x]-[x]=4$ を満たす実数 x の範囲を求めよ。
(龍谷大)★★★★

解説動画

公式

3. 関数のグラフ

基本問題

- 例題 18** (1) 放物線 $y=x^2-2x+2$ を x 軸方向に 2, y 軸方向に -1 だけ平行移動した放物線の方程式を求めよ。
- 例題** (2) 放物線 $y=2x^2-4x+1$ を, x 軸, y 軸, 原点に関して, それぞれ対称移動した放物線の方程式を求めよ。
- 例題** (3) 放物線 $y=x^2$ と直線 $y=3x-k$ が接するとき, k の値を求めよ。

●グラフの平行移動

関数 $y=f(x)$ のグラフを x 軸方向に p , y 軸方向に q だけ平行移動したグラフを表す関数は,

$$y-q=f(x-p)$$

●グラフの対称移動

関数 $y=f(x)$ のグラフの
 x 軸対称 $\rightarrow y=-f(x)$
 y 軸対称 $\rightarrow y=f(-x)$
 原点对称 $\rightarrow y=-f(-x)$

柱

- 例題 19** 放物線 $y=x^2+ax+b$ を原点に関して対称移動し, さらに x 軸方向に 3, y 軸方向に 6 だけ平行移動すると, 放物線 $y=-x^2+4x-7$ が得られるという。このとき, $a=\boxed{\text{ア}}$, $b=\boxed{\text{イ}}$ となる。(名城大)★

- 例題 20** * (1) 2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフが 3 点 $(1, 0)$, $(-2, 0)$, $(2, 8)$ を通るとき, 定数 a, b, c の値を求めよ。(広島工業大)★
- (2) 2 点 $(-1, 4)$, $(5, 4)$ を通り, x 軸に接する放物線の方程式を求めよ。(法政大)★★

- 例題 21** * (1) $y=|x-1|-2|x+1|$ ($-4 \leq x \leq 2$) の最大値, 最小値を求めよ。(愛媛大)★★
- 例題** (2) $y=|x^2-3x|+|x-1|-1$ のグラフをかけ。(改群馬大)★★

A

- 22** 直線 $x=2$ に関して放物線 $C:y=x^2-2x+3$ と対称な曲線の方程式を求めよ。また, 点 $(-1, 1)$ に関して放物線 C と対称な曲線の方程式を求めよ。(摂南大)★★

- * **23** (1) 2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフが, 2 点 $(-1, 0)$, $(3, 8)$ を通り, 直線 $y=2x+6$ に接するとき, a, b, c の値を求めよ。(日本歯科大)★★
- (2) 2 つの曲線 $y=x^2$, $y=-(x-4)^2+2$ の両方に接する直線の傾きを求めよ。(東京都市大)★★★

- 例題 24** (1) $y=x|x-1|-3x$ のグラフをかけ。
- (2) 方程式 $x|x-1|=3x+k$ の実数解の個数を求めよ。ただし, k は実数の定数とする。★★

B

- * **25** $f(x)=\frac{1}{2}|x^2+2x-3|+x-\frac{3}{2}$ と定めるとき, 次の問いに答えよ。

- (1) 関数 $y=f(x)$ のグラフをかけ。
- (2) 曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=k(x+3)-\frac{5}{2}$ の共有点の個数は, 定数 k の値によってどのように変わるか調べよ。(東京都立大)★★★★



公式

4. 2次関数の最大・最小

基本問題

● 2次関数の最大・最小

まずは平方完成をし、
 $y=a(x-p)^2+q$ の形にして、
 軸を求める。
 軸から離れれば離れるほど、
 y の値は大きく、または小さ
 くなることに注意して考える。

- 例題 26 (1) 関数 $y=2x^2-12x+c$ ($-1 \leq x \leq 4$) の最大値が7であるとき、定数 c の値と、この関数の最小値を求めよ。
- (2) 2次関数 $y=x^2+2ax-3a+1$ の最小値 m を a で表せ。また、 m の最大値を求めよ。

柱

- 例題 27 2次関数 $y=ax^2+4ax+b$ が $-1 \leq x \leq 2$ において最大値5、最小値1をとるとき、 a 、 b の値を求めよ。(東北学院大)★

- 例題 28 $a \geq 0$ とする。2次関数 $y=x^2-2ax+a^2+a+1$ ($0 \leq x \leq 1$) について、次の問いに答えよ。

- (1) 最大値 M を a を用いて表せ。
- (2) 最小値 m を a を用いて表せ。(改 広島工業大)★★

考え方 軸や定義域に文字が含まれる関数の最大・最小は、軸と定義域の位置関係に着目して、場合分けするのが基本。

- 例題 29 x を実数とする。 $A=x^2-2x$ とおくと、 A の最小値は $\boxed{ア}$ である。よって、 $y=(x^2-2x)^2+4(x^2-2x)$ の最小値は $\boxed{イ}$ である。(北海道工業大)★★

- 例題 30 $x \geq 1$, $y \geq -1$, $2x+y=5$ であるとき、 xy の最大値は $\boxed{ア}$ 、最小値は $\boxed{イ}$ で、 x^2+y^2 の最大値は $\boxed{ウ}$ 、最小値は $\boxed{エ}$ である。(摂南大)★★

考え方 条件式を用いて変数を減らす。

A

- 例題 31 a を実数とする。 x の2次関数 $f(x)=x^2+ax+1$ の区間 $a-1 \leq x \leq a+1$ における最小値を $m(a)$ とする。

- (1) $m(a)$ を a の値で場合分けして求めよ。
- (2) a が実数全体を動くとき、 $m(a)$ の最小値を求めよ。(改 岡山大)★★★

- 例題 32 (1) $x^2+2y^2=1$ のとき $x+4y^2$ の最大値と最小値を求めよ。(福島大)★★

- 例題 (2) x , y を実数とする。 $x^2-4xy+5y^2-6x+6y+12$ は、 $x=\boxed{ア}$, $y=\boxed{イ}$ のとき、最小値 $\boxed{ウ}$ をとる。(成蹊大)★★

- 33 (1) a を実数とする。関数 $y=-x^2+4x$ ($x \geq a$) の最大値が3となるときの a の値を求めよ。(改 福岡大)★★

- * (2) a を実数とする。関数 $f(x)=x|x-1|$ の $a \leq x \leq a+1$ における最大値を求めよ。(改 信州大)★★★

解説
動画

B

- 34 $k \geq 0$ とする。関数 $f(x)=x^2-2kx+\frac{1}{2}$ について、次の問いに答えよ。

- (1) 定義域が $0 \leq x \leq 1$ である2次関数 $y=f(x)$ の最小値を m とするとき、 m を k を用いて表せ。
- (2) $0 \leq x \leq 1$ であるすべての x について $0 \leq f(x) \leq 1$ が成り立つような k の値の範囲を求めよ。(宇都宮大)★★★★

解説
動画

公式

5. 2次不等式の応用, 2次関数の総合問題

基本問題

例題 35 2次関数 $y=x^2+(m+2)x+m+4$ について, 次の問いに答えよ。ただし, m は定数とする。

- (1) この2次関数のグラフが x 軸と共有点をもつとき, m の値の範囲を求めよ。
- (2) この2次関数のグラフが x 軸と接するとき, 接点の x 座標を求めよ。

● 2次不等式とグラフ

$y=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$) のグラフと x 軸の共有点の個数は, $ax^2+bx+c=0$ の判別式 D の符号で判断する。

柱

例題 36 (1) 2次不等式 $ax^2+bx+3>0$ の解が, $-1<x<3$ であるとき, a, b の値を求めよ。
(高岡法科大)★

例題 (2) 放物線 $y=mx^2+(1-2m)x+4m$ の y の値が常に負になるような定数 m の値の範囲を求めよ。★

***37** 実数を係数とする2次方程式 $x^2-2(k+1)x+2(k^2+3k-10)=0$ が, 次の条件を満たすとき, 定数 k の値の範囲を求めよ。

例題 (1) 正の解と負の解をもつ。

例題 (2) 異なる2つの正の解をもつ。

例題 (3) すべての解が -2 より小さい。★★

考え方 2次方程式 $f(x)=0$ の解の存在範囲の問題は, 放物線 $y=f(x)$ と x 軸の共有点の問題に帰着するとよい。放物線 $y=f(x)$ の頂点(または $f(x)=0$ の判別式), 軸, ある点での値 $f(p)$ の符号に着目して考える。

例題 38 a と x を実数とする。 x についての不等式 $x^2-(a^2+a-2)x+a^3-2a<0$ を解け。
(法政大)★★

A

例題 39 $f(x)=x^2-3ax+\frac{9}{2}a+18$ について, すべての実数 x に対して, $f(x)>0$ となる定数 a の値の範囲は $\boxed{\text{ア}}<a<\boxed{\text{イ}}$ である。また, $-2 \leq x \leq 2$ で常に $f(x) \geq 0$ となる a の値の範囲は $\boxed{\text{ウ}} \leq a \leq \boxed{\text{エ}}$ である。
(撰南大)★★★

***40** 放物線 $y=x^2+ax+2$ が, 2点 A(0, 1), B(2, 3) を結ぶ線分と2個の共有点をもつときの a の値の範囲を求めよ。
(改 群馬大)★★★★

41 a を実数の定数とする。2次不等式 $ax^2+6x+9>0$ を満たす整数 x がただ1つであるような a の値の範囲を求めよ。
(改 関東学院大)★★★★ [解説動画](#)

B

42 次の条件を満たす実数 x の値の範囲をそれぞれ求めよ。

(1) $x^2+xy+y^2=1$ を満たす実数 y が存在する。

(2) $x^2+xy+y^2=1$ を満たす正の実数 y が存在しない。

(3) すべての実数 y に対して $x^2+xy+y^2>x+y$ が成り立つ。

(慶應義塾大)★★★★