

公式

31. 等差数列・等比数列

基本問題

- 262 (1) 初項が5, 第9項が21である等差数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。また, 数列 $\{a_n\}$ の初項から第50項までの和を求めよ。
- (2) 公比が3, 第5項が162である等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。また, 数列 $\{a_n\}$ の初項から第6項までの和を求めよ。

●等差数列・等比数列

初項 a , 公差 d の等差数列の一般項 a_n は,

$$a_n = a + (n-1)d$$

初項 a , 公比 r の等比数列の一般項 a_n は,

$$a_n = ar^{n-1}$$

QR 和の公式

柱

*263 第10項が81, 第25項が51の等差数列 $\{a_n\}$ がある。

例題 (1) 一般項 a_n を求めよ。

例題 (2) 初項から第 n 項までの和を S_n とする。 S_n が最大になるときの n とそのときの S_n の値を求めよ。(広島工業大)★★

例題 264 0でない2つの実数 a, b に対し, $a, 2, b$ がこの順で等比数列であり, $\frac{1}{2}, \frac{1}{b}, \frac{1}{a}$ がこの順で等差数列である。このとき, a, b の値を求めよ。

(改 神奈川大)★

考え方 3つの数 x, y, z がこの順に等差数列 $\iff 2y=x+z$
0でない3つの数 x, y, z がこの順に等比数列 $\iff y^2=xz$

例題 265 初項 a_1 , 公比 r が正の数である等比数列 $\{a_n\}$ について $a_2=6, a_5=48$ が成り立っている。このとき, $a_1=\boxed{\text{ア}}, r=\boxed{\text{イ}}$ である。したがって, $a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_n^2=\boxed{\text{ウ}}$ となる。 $b_n=a_na_{n+1}$ とすると数列 $\{b_n\}$ も公比 $\boxed{\text{エ}}$ の等比数列となり, $b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n=\boxed{\text{オ}}$ である。

(同志社大)★★

A

例題 266 初項から第7項までの和が3, 初項から第14項までの和が18である等比数列がある。この等比数列の公比を r とすると, $r^7=\boxed{\text{ア}}$ である。また, 初項から第21項までの和は $\boxed{\text{イ}}$ であり, 第22項から第28項までの和は $\boxed{\text{ウ}}$ である。(甲南大)★★

例題 267 1以上50以下の5を分母とする既約分数の総和を求めよ。(昭和薬科大)★★

268 等比数列 $a_1, a_2, a_3, \cdots$ の初項から第3項までの和は35, 初項から第6項までの和は315である。この等比数列の初項から第 n 項までの積が50桁以上の数となる最小の n を求めよ。ただし, $\log_{10}5=0.7$ とし, 公比は実数とする。(山形大)★★

例題 269 4で割った余りが2であり, 5で割った余りが3であるような自然数を小さい方から順に並べて, $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$ とする。 $a_1=\boxed{\text{ア}}, a_2=\boxed{\text{イ}}, a_3=\boxed{\text{ウ}}$ である。一般に, a_n を n を用いて表すと, $a_n=\boxed{\text{エ}}$ と表される。和 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$ が4桁の数となるような n の最小値は $\boxed{\text{オ}}$, 最大値は $\boxed{\text{カ}}$ である。(関西大)★★★

解説
動画

B

例題 270 数列 $\{a_n\}$ を初項3, 公比3の等比数列とし, 数列 $\{b_n\}$ を初項11, 公差8の等差数列とする。 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ に共通に含まれる項を小さいものから順に並べて得られる数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ。(島根大)★★★★

公式

32. いろいろな数列

基本問題

●和の公式

$$\sum_{k=1}^n c = cn \quad (c \text{ は定数})$$

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2} n(n+1)$$

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left\{ \frac{1}{2} n(n+1) \right\}^2$$

例題 271 (1) 次の和を求めよ。

(i) $\sum_{k=1}^n (k^2 - 3k + 5)$ (ii) $\sum_{k=1}^{n-1} 4^k$

(iii) $\sum_{k=1}^n (2k^3 + 3k^2)$

(iv) $1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 7 + \cdots + 50 \cdot 99$

例題 (2) 数列 1, 5, 11, 19, 29, 41, ……の一般項を求めよ。

柱

272 次の和を求めよ。

例題 (1) $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \cdots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$ ★

(2) $\sum_{k=1}^{400} \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}}$ (明治大) ★

例題 (3) $1 \cdot (n-1)^2 + 2 \cdot (n-2)^2 + 3 \cdot (n-3)^2 + \cdots + (n-2) \cdot 2^2 + (n-1) \cdot 1^2$
(ただし, $n \geq 2$) (近畿大) ★★

例題 273 $S_n = 1 + 2 \cdot \frac{1}{3} + 3 \left(\frac{1}{3} \right)^2 + 4 \left(\frac{1}{3} \right)^3 + \cdots + n \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1}$ を n の式で表せ。
(中央大) ★★

考え方 (等差数列) × (等比数列) の形をした数列の和 $S \rightarrow S - rS$ を利用 (r は公比)

例題 274 数列 $\{a_n\}$ の a_1 から a_n までの和 S_n について $S_n = 2n^3 - 14n^2 - 28n$ のとき、一般項 a_n は $a_n = \boxed{\text{ア}}$ である。また、 $a_n < 0$ を満たす自然数 n は $\boxed{\text{イ}}$ 個あり、そのような a_n についてそれらの和は $\boxed{\text{ウ}}$ である。 (改 関西学院大) ★★

例題 275 数列 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \cdots$ について、

(1) $\frac{1}{101}$ は第何項か。また、 $\frac{21}{32}$ は第何項か。

(2) 分母が同じ項を 1 つの群と考える。例えば $\frac{3}{5}$ は第 4 群の数である。このとき、第 m 群の数の総和を求めよ。 ★★

A

276 次の和を求めよ。

* (1) $\frac{1}{1} + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \cdots + \frac{1}{1+2+3+\cdots+n}$ (改 関西大) ★★

例題 (2) $\frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{1}{5 \cdot 7 \cdot 9} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}$
(同志社大) ★★

例題 277 第 n 項が $a_n = 2n - 1$ ($n = 1, 2, 3, \cdots$) である数列 $\{a_n\}$ を、下のように a_1, a_2 を第 1 群, a_3, a_4, a_5, a_6 を第 2 群, $a_7, a_8, a_9, \cdots, a_{14}$ を第 3 群, ……とし、第 m 群が 2^m 個の項を含むように区分する。

$$1, 3 \mid 5, 7, 9, 11 \mid 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27 \mid 29, \cdots$$

- (1) 第 m 群の最後の項を求めよ。
- (2) 第 m 群に含まれる項の総和を求めよ。
- (3) 2003 は第 k 群の先頭から p 番目の項であるとして、 k および p を求めよ。
(岩手医科大学) ★★

278 数列 $\{a_n\}$ を $a_n = [\sqrt{n}]$ ($n = 1, 2, 3, \cdots$) とする。ただし、 $[x]$ は実数 x を超えない最大の整数を表すとする。例えば、 $a_2 = [\sqrt{2}] = 1, a_4 = [\sqrt{4}] = 2$ となる。 $a_n = 2$ となる項は全部で $\boxed{\text{ア}}$ 個ある。 k を自然数とすると、 $a_n = k$ となる項は全部で $\boxed{\text{イ}}$ 個ある。 $a_n \leq k$ を満たすすべての項の和を W_k とすると、 $W_k = \boxed{\text{ウ}}$ である。
(大阪工業大) ★★

B

例題 279 座標平面上で、点 (x, y) を考える。ここで、 x, y を 0 以上の整数、 n を自然数とする。このとき、以下の個数を n で表せ。 解説動画

- (1) $x + y \leq n$ を満たす点 (x, y) の個数
- (2) $\frac{x}{2} + y \leq n$ を満たす点 (x, y) の個数
- (3) $x + \sqrt{y} \leq n$ を満たす点 (x, y) の個数 (中央大) ★★

公式

33. 漸化式

基本問題

280 次のように定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ。

例題 (1) $a_1 = 2, a_{n+1} = a_n + 3$

例題 (2) $a_1 = 3, a_{n+1} = 3a_n$

例題 (3) $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + n^2$

例題 (4) $a_1 = 4, a_{n+1} = 3a_n + 2$

● $a_{n+1} - a_n = f(n)$ 型
 $n \geq 2$ のとき,

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$$

● $a_{n+1} = pa_n + q (p \neq 1)$ 型
 $\alpha = p\alpha + q$ を解いて,
 $a_{n+1} - \alpha = p(a_n - \alpha)$
 と変形する。

柱

例題 281 数列 $\{a_n\}$ が $a_1 = 3, a_{n+1} = 2a_n + 3^{n+1} (n = 1, 2, 3, \dots)$ を満たすとき、一般項 a_n を求めよ。(信州大)★

例題 282 数列 $\{a_n\}$ を $a_1 = 3, a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n + 1} (n = 1, 2, 3, \dots)$ により定める。 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。(三重大)★★

例題 283 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする。 $S_n = 4n - a_n$ が成り立つとき、この数列の一般項 a_n を求めよ。(福岡大)★★

例題 284 数列 $\{a_n\}$ が $a_1 = 2, \sqrt{2} a_{n+1}^5 = a_n^6 (n = 1, 2, 3, \dots)$ を満たすとする。このとき、 a_n を n を用いて表せ。(改中央大)★★

考え方 漸化式に a_{n+1}^5 などの累乗が含まれる場合や、 a_n に $\sqrt{\quad}$ がついている場合には、両辺の対数をとるとうまくいくことが多い。

A

例題 285 $a_1 = 4, a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n - 2n + 1 (n = 1, 2, 3, \dots)$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ に対して、 $b_n = a_{n+1} - a_n$ とおく。数列 $\{b_n\}$ の一般項は $b_n = \boxed{\text{ア}}$ である。これより、数列 $\{a_n\}$ の一般項は $a_n = \boxed{\text{イ}}$ である。(福岡大)★★

例題 286 $a_1 = 1, a_2 = 2, a_{n+2} - 4a_{n+1} - 21a_n = 0$ で定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。(四日市大)★★

例題 287 次の条件を満たす数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ。
 $a_1 = 2, 3na_{n+1} = (n+1)a_n (n = 1, 2, 3, \dots)$ (改 徳島大)★★★

例題 288 数列 $\{a_n\}$ が $a_1 = 4, a_{n+1} = \frac{4a_n + 3}{a_n + 2} (n = 1, 2, 3, \dots)$ で定められているとき、次の問いに答えよ。

(1) $b_n = \frac{a_n - 3}{a_n + 1}$ とおくとき、数列 $\{b_n\}$ の漸化式を求めよ。

(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。(弘前大)★★★

B

例題 289 次の関係式で定まる 2 つの数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ がある。

$$a_1 = 2, b_1 = 1, a_{n+1} = a_n + b_n, b_{n+1} = 9a_n + b_n (n = 1, 2, 3, \dots)$$

このとき、数列 $\{a_n + kb_n\}$ が等比数列となるように定数 k を決めると $k = \pm \boxed{\text{ア}}$ となる。また、数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めると、 $a_n = \boxed{\text{イ}}$ となる。

したがって、 $S_n = \sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \boxed{\text{ウ}}$ となる。(広島国際大)★★★★



公式

34. 数学的帰納法, 数列の総合問題

基本問題

290 n を自然数とする。次の等式, 不等式を数学的帰納法を用いて証明せよ。

例題 (1) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

例題 (2) $3^n \geq 1 + 2n$

●数学的帰納法

(I) $n=1$ のとき成り立つことを示す。

(II) $n=k$ のとき成り立つと仮定し, $n=k+1$ のとき成り立つことを示す。

柱

例題 291 n は正の整数とする。 $n > 3$ のとき, 不等式 $n! > 2^n$ が成り立つことを数学的帰納法を用いて示せ。(富山県立大)★★

292 一般項が $a_n = 6^{n+2} + 7^{2n+1}$ ($n=1, 2, 3, \dots$) で表される数列 $\{a_n\}$ を考える。すべての自然数 n に対して, a_n が 43 で割り切れることを示せ。

(久留米大)★★

考え方 数学的帰納法を用いる。 $n=k+1$ のときの式 $6^{(k+1)+2} + 7^{2(k+1)+1}$ を, $n=k$ のときの仮定が利用できる形に変形する。

例題 293 $a_1 = \frac{1}{4}, a_{n+1} = \frac{3n+2}{n+2} \cdot \frac{1}{4-a_n}$ ($n=1, 2, 3, \dots$) で定義される数列 $\{a_n\}$ について, 次の問いに答えよ。

(1) a_2, a_3, a_4 を求めよ。

(2) 一般項 a_n を推定し, それが正しいことを数学的帰納法を用いて証明せよ。

(広島市立大)★★

例題 294 数直線上を原点から出発し, 次の規則で移動する点 P がある。

1 個のさいころを投げて, 出た目が 5 以上の場合は, 正の向きに 2 進み,

出た目が 4 以下の場合は, 正の向きに 1 進む。

さいころを n 回投げたとき, P の座標が偶数になる確率を a_n とする。

(1) a_1, a_2, a_3 を求めよ。

(2) a_{n+1} を a_n を用いて表せ。

(3) a_n を求めよ。

(福井大)★★

A

295 2 次関数 $f(x) = x^2 - 5$ に対し, 数列 $\{x_n\}$ を次のように定める。

$x_1 = 3$, また $n \geq 1$ に対して, $x = x_n$ における $y = f(x)$ のグラフの接線と x 軸との交点の x 座標を x_{n+1} とする。

(1) $n \geq 1$ に対し, $x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 5}{2x_n}$ が成立することを示せ。

(2) $n \geq 1$ に対し, $\sqrt{5} < x_{n+1} < x_n$ であることを数学的帰納法により示せ。

(水産大)★★

*296 $n=1, 2, 3, \dots$ に対して, $(1 + \sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$ が成立するように, 有理数の数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ が与えられている。

(1) a_{n+1} と b_{n+1} を, a_n と b_n で表せ。

(2) $n=1, 2, 3, \dots$ に対して, $(1 - \sqrt{2})^n = a_n - b_n\sqrt{2}$ が成立することを数学的帰納法で証明せよ。

(3) $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ の一般項をそれぞれ求めよ。

(南山大)★★★

例題 297 硬貨を 1 枚投げ, 表が出たときは 1 点, 裏が出たときは 2 点を得る。この試行を n 回繰り返して得られた点の合計を 3 で割ったとき, 余りが 0 となる確率を a_n , 余りが 1 となる確率を b_n , 余りが 2 となる確率を c_n とする。

(1) a_1, b_1, c_1 を求めよ。 (2) a_2, b_2, c_2 を求めよ。

(3) a_{n+1} を b_n と c_n を用いて表せ。 (4) a_{n+1} を a_n を用いて表せ。

(5) a_n を n を用いて表せ。

(甲南大)★★★

B

例題 298 2 次方程式 $x^2 - x - 1 = 0$ の 2 つの解を α, β とおき, $a_n = \alpha^n + \beta^n$ ($n=1, 2, 3, \dots$) とする。次の問いに答えよ。

(1) a_1, a_2, a_3 を求めよ。

(2) $a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 0$ ($n=1, 2, 3, \dots$) が成り立つことを証明せよ。

また, 各 a_n が正の整数であることを数学的帰納法で証明せよ。

(改 北海道教育大)★★★

公式

35. ベクトルと内積

基本問題

【例題】299 (1) 1 辺の長さが 4 の正三角形 ABC について、内積 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ と $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$ を求めよ。

【例題】(2) $\vec{a} = (4, -3)$ と同じ向きの単位ベクトル $\vec{e}$ を成分で表せ。

(3) $\vec{a} = (-2, \sqrt{3})$, $\vec{b} = (3\sqrt{3}, -1)$ のとき、 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ の値を求め、 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。

【例題】(4) $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{5}$ のとき、 $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $|\vec{a} + \vec{b}|$ の値を求めよ。

●ベクトルの内積

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$

(θ は $\vec{a}$, $\vec{b}$ のなす角)

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

$$\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

●内積と成分

$$\vec{a} = (a_1, a_2), \vec{b} = (b_1, b_2)$$

$$\text{のとき, } \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

柱

【例題】300 (1) 2 つのベクトル $\vec{a} = (k, 1)$, $\vec{b} = (3, k+2)$ が平行になるように、 k の値を定めよ。(高崎経済大)★

【例題】(2) $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$ で、 $\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{a} + 6\vec{b}$ が垂直であるとき、 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を求めよ。(京都産業大)★

【考え方】(1) $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$ のとき、 $\vec{a} \parallel \vec{b} \iff \vec{b} = \ell \vec{a}$ となる実数 ℓ がある

【例題】301 $\vec{a} = (-4, 3)$, $\vec{b} = (3, 1)$ に対して、 $|\vec{a} + t\vec{b}|$ を最小にする実数 t の値は $\boxed{\text{ア}}$ で、そのときの最小値は $\boxed{\text{イ}}$ である。また、このとき $\vec{a} + t\vec{b}$ と $\vec{b}$ とのなす角を θ とすると $\theta = \boxed{\text{ウ}}^\circ$ である。(立命館大)★

*302 $\triangle OAB$ において、 $|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}| = \left| \overrightarrow{OA} - \frac{2}{3} \overrightarrow{OB} \right| = \sqrt{10}$, $OB = 3$ であるとき、 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \boxed{\text{ア}}$, $OA = \boxed{\text{イ}}$, $AB = \boxed{\text{ウ}}$ である。また、 $\triangle OAB$ の面積は $\boxed{\text{エ}}$ となる。

【考え方】ウ…… $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}|$ と考える。

A

*303 $\triangle ABC$ は点 O を中心とする半径 1 の円に内接し、 $5\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB} + 4\overrightarrow{OC} = \vec{0}$ を満たす。このとき、内積 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ の値は $\boxed{\text{ア}}$ であり、辺 AB の長さは $\boxed{\text{イ}}$ である。(芝浦工業大)★★

*304 2 点 $A(4, 0)$, $B(0, 2)$ と円 $x^2 + y^2 = 25$ 上の点 $P(x, y)$ に対し、 $k = \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP}$ とおく。 k の最大値および最小値を求めよ。(改 埼玉大)★★★

305 点 O を原点とする座標平面において点 C を $C(2, 2\sqrt{3})$ とする。点 P は、 $|\overrightarrow{CP}| = 2\sqrt{3}$ を満たし、ベクトル $\vec{a} = (0, -1)$, $\vec{b} = (1, 0)$ に対して、 $\overrightarrow{CP} \cdot \vec{a} = -3$, $\overrightarrow{CP} \cdot \vec{b} < 0$ を満たす。このとき、点 P の座標と $\triangle OCP$ の面積を求めよ。(福岡大)★★★

解説
動画

B

【例題】306 $\vec{a}$, $\vec{b}$ を平面上のベクトルとする。 $3\vec{a} + 2\vec{b}$ と $2\vec{a} - 3\vec{b}$ がともに単位ベクトルであるとき、ベクトル $\vec{a} + \vec{b}$ の大きさ $|\vec{a} + \vec{b}|$ の最大値を求めよ。(横浜市立大)★★★