

公式

26. 微分係数と導関数, 接線の方程式

基本問題

例題 219 (1) 関数 $f(x)=x^3$ の $x=2$ における微分係数を定義に従って求めよ。

(2) 次の関数を微分せよ。

例題 (i) $f(x)=x^4+2x^3+x+1$

例題 (ii) $f(x)=(x+4)^3$

例題 (3) 曲線 $y=x^3+2x$ 上の点 $(1, 3)$ における接線の方程式を求めよ。

● x^n の微分

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

k が定数なら, $(k)' = 0$

● 接線の方程式

曲線 $y=f(x)$ 上の

点 $(a, f(a))$ における接線の方程式は,

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

柱

例題 220 * (1) 点 $(1, 1)$ を通り, 曲線 $y=x^3-4x+5$ に接する直線の方程式を求めよ。
(愛媛大)★

例題 (2) $t>0$ とするとき, 曲線 $C: y=x^2$ 上の点 $P(t, t^2)$ における C の法線 (P を通り, P における C の接線と直交する直線) は, 点 $(-2, 4)$ を通るといふ。そのとき, t の値をすべて求めよ。
(小樽商科大)★★

考え方 (1) 曲線 $y=f(x)$ 上にない定点を通る接線は, 接点の座標を $(a, f(a))$ として考える。

例題 221 曲線 $C: y=x^3-3x^2-9x+8$ の $x=0$ における接線の方程式を求めよ。また, この接線と平行な, 曲線 C に関するもう 1 つの接線の接点の座標を求めよ。
(日本工業大)★

222 座標平面上において, 直線 $y=kx-11$ が曲線 $y=x^3-2x^2+5x-3$ と接するとき, $k=\boxed{\text{ア}}$ であり, 接点の座標は $\boxed{\text{イ}}$ である。また, 接点と異なる交点の座標は $\boxed{\text{ウ}}$ である。
(近畿大)★★

A

例題 223 xy 平面上に 2 つの曲線 $y=x^3+3$, $y=x^3-1$ がある。この 2 つの曲線のどちらにも接する直線の方程式を求めよ。
(明治大)★★

例題 224 2 曲線 $y=2x^3+2x^2+a$, $y=x^3+2x^2+3x+b$ (a, b は定数) が接していて, 接点における接線が点 $(2, 15)$ を通るとき, a, b の値と接線の方程式を求めよ。
(明治大)★★

225 4 次曲線 $C: y=f(x)=x^4-4x^2$ 上の点 $P(t, f(t))$ における接線 ℓ が P 以外の 2 点で C と交わるような実数 t の範囲を求める。接線 ℓ の方程式は $\boxed{\text{ア}}$ である。したがって, 4 次曲線 C と接線 ℓ との共有点の x 座標が満たす方程式は $\boxed{\text{イ}}$ となる。このうち, 交点の x は $x \neq t$ であるから, 方程式 $\boxed{\text{ウ}}$ を満足する。したがって, 求める実数 t の範囲は $\boxed{\text{エ}}$ となる。
(明治薬科大)★★

B

* **226** 放物線 $y=x^2-1$ 上にない点 (a, b) から, $y=x^2-1$ に接線を引くとする。このとき, 接線を 2 本引くことができるための必要十分条件は a と b を用いて表すと, $\boxed{\text{ア}}$ であり, この 2 本の接線が垂直に交わるとき, $b=\boxed{\text{イ}}$ である。
(改立命館大)★★★

公式

27. 関数の値の変化, 最大・最小

基本問題

- 例題 227** (1) 関数 $y=x^3-3x^2-24x$ の極値を求め, グラフをかけ。
- 例題** (2) 関数 $y=-3x^4+4x^3+12x^2-2$ の極値を求め, グラフをかけ。
- 例題** (3) 関数 $y=2x^3-9x^2+12x+3$ ($0\leq x\leq 3$) の最大値, 最小値を求めよ。
- (4) 幅, 高さ, 奥行きがそれぞれ x , x , $5-2x$ の直方体の体積 V の最大値を求めよ。

●極大値, 極小値の求め方

関数 $f(x)$ の極値を求めるには, $f'(x)=0$ となる x の値を求め, 増減表をかけばよい。
 $f'(x)>0$ の区間では, $f(x)$ は増加し,
 $f'(x)<0$ の区間では, $f(x)$ は減少する。

柱

- 例題 228** 3 次関数 $f(x)=x^3+ax^2+bx$ が $x=3$ で極値 -27 をとるとき, 定数 a , b の値を求めよ。 (改 高知大)★

考え方 $x=a$ で極値をとるならば $f'(a)=0$ であるが, その逆は成り立たない。増減表をかくて $x=a$ で極値をとるかどうかを確かめないといけない。

- 例題 229** * (1) 関数 $f(x)=x^3+(k-9)x^2+(k+9)x+1$ (k は定数) が極値をもたないような k の値の範囲を求めよ。 (千葉工業大)★★
- (2) a を実数とする。関数 $f(x)=x^3-ax$ が区間 $-1<x<1$ において極値をとるような a の値の範囲を求めよ。 (改 早稲田大)★★

- 例題 230** a は $a>0$ を満たす定数とする。関数 $f(x)=ax^3-3ax^2+b$ ($-2\leq x\leq 3$) の最大値が 6, 最小値が -14 のとき, 定数 a , b の値を求めよ。★★

A

- 231** 関数 $f(x)=x^3-kx^2-k^2x$ が極大値 5 をもつような定数 k の値を求めよ。 (名城大)★★

- * **232** $0^\circ\leq\theta\leq 180^\circ$ の範囲で, θ の関数 $y=4\sin^3\theta+3\cos^2\theta+1$ の最大値と最小値, およびそのときの θ の値を求めよ。 (宮城教育大)★★

- 例題 233** 関数 $f(x)=x^3+3x^2+ax$ について, 次の問いに答えよ。ただし, a は定数である。
- (1) $f(x)$ が極大値と極小値をもつような a のとりうる値の範囲を求めよ。
 - (2) $f(x)$ が極大値と極小値をとるとき x の値をそれぞれ α , β ($\alpha<\beta$) とする。 $\alpha+\beta$ および $\alpha\beta$ を a で表せ。
 - (3) $f(x)$ の極大値と極小値の和が 0 となるとき, a の値を求めよ。 (公立鳥取環境大)★★★

- * **234** 半径 1 の球に内接する高さ h , 底面の半径 r , 側面積 S の直円錐がある。
- (1) r を h を用いて表せ。
 - (2) S を h を用いて表せ。
 - (3) S が最大となるとき h , r , S の値をそれぞれ求めよ。 (名城大)★★★

解説
動画

B

- 235** 実数 a に対し, 関数 $f(x)=ax^3-\frac{3}{2}(a^2+1)x^2+3ax$ とおく。ただし, $a\neq 0$ とする。

- (1) $f(x)$ が極値をもたないような a の値を求めよ。
- (2) $f(x)$ の極大値が正で, 極小値が負となるような a の値の範囲を求めよ。 (岐阜大)★★★

解説
動画

公式

28. 方程式・不等式への応用

基本問題

- 236 (1) x の3次方程式 $x^3 - 3x - 3 = 0$ の実数解の個数を求めよ。また、その実数解は、 $2 < x < 3$ の範囲にあることを証明せよ。

- 例題 (2) $x > 0$ のとき、次の不等式が成り立つことを証明せよ。

$$x^3 - 9x \geq 3x - 16$$

●方程式への応用

方程式 $f(x) = k$ の実数解は、関数 $y = f(x)$ のグラフと直線 $y = k$ の共有点の x 座標である。

●不等式への応用

$f(x) \geq g(x)$ を示すには、
($f(x) - g(x)$ の最小値) ≥ 0
を示せばよい。

柱

- 例題 237 (1) 方程式 $2x^3 - 12x^2 + 18x + k = 0$ が異なる3つの実数解をもつための定数 k の値の範囲を求めよ。(久留米大)★

- (2) 座標平面において、直線 $y = 4x + a$ と曲線 $y = x^3 - 6x^2 + 13x + 2$ との共有点の個数を調べよ。(東京理科大)★★

考え方 文字定数を分離して考える。

- *238 不等式 $x^4 - \frac{4}{3}x^3 - 4x^2 + k > 0$ がすべての実数 x について成り立つような定数 k の値の範囲を求めよ。★★

- 例題 239 関数 $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x$ に対して、次の問いに答えよ。

- (1) 曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(t, f(t))$ における接線の方程式を求めよ。
(2) 点 $(0, k)$ から曲線 $y = f(x)$ に引くことができる接線の本数を、 k の値によって調べよ。(大阪市立大)★★

A

- 例題 240 (1) x についての方程式 $\frac{2}{3}x^3 - x^2 - 4x + 3 = k$ が異なる2つの負の解と1つの正の解をもつとき、定数 k の値の範囲を求めよ。

- (2) t についての方程式 $\frac{2}{3} \cdot 5^{3t} - 5^{2t} - 4 \cdot 5^t + 3 = k$ の実数解の個数が1つのとき、定数 k の値の範囲を求めよ。

- (3) θ についての方程式 $\frac{2}{3} \sin^3 \theta - \sin^2 \theta - 4 \sin \theta + 3 = k$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) の実数解の個数が2つのとき、定数 k の値の範囲を求めよ。★★

- 241 2つの関数を $f(x) = 8x^2 + 16x - k$, $g(x) = 2x^3 + 5x^2 + 4x$ とする。ただし、 k は実数とする。解説動画

- (1) $-3 \leq x \leq 3$ の範囲の任意の x に対して、つねに、 $f(x) \leq g(x)$ となるための k の値の範囲を求めよ。

- (2) $-3 \leq x_1 \leq 3$, $-3 \leq x_2 \leq 3$ の範囲の任意の x_1, x_2 に対して、つねに、 $f(x_1) \leq g(x_2)$ となるための k の値の範囲を求めよ。(西南学院大)★★★

- 例題 242 a を実数とする。3次方程式 $x^3 + ax^2 - a^2x - 5 = 0$ が相異なる3つの実数解をもつような a の値の範囲を求めよ。(学習院大)★★★

B

- 例題 243 a を実数とし、関数 $f(x) = x^3 - 3ax + a$ を考える。 $0 \leq x \leq 1$ において $f(x) \geq 0$ となるような a の範囲を求めよ。(大阪大)★★★★解説動画

公式

29. 積分の計算, 定積分を含む関数

基本問題

244 次の不定積分, 定積分を求めよ。

例題 (1) $\int (2x^2 + 3x - 2)dx - \int (3x^2 - 7x + 5)dx$

例題 (2) $\int (x^2 + t)dt$ 例題 (3) $\int_0^1 (4x - 1)^2 dx$

例題 (4) $\int_{-2}^2 (x^3 + 3x^2 + 5x + 1)dx$

例題 (5) $\int_{-2}^3 (x + 2)(x - 3)dx$

●定積分の計算

$f(x)$ の原始関数の 1 つを $F(x)$ とするとき,

$$\int_a^b f(x)dx = \left[F(x) \right]_a^b = F(b) - F(a)$$

●定積分の性質

$$\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$$

など

QR 公式

柱

例題 245 (1) 関数 $f(x)$ が $f(x) = 2x^2 + 3x + \int_0^{\frac{1}{2}} f(t)dt$ を満たすとき, $f(x)$ を求めよ。

(慶應義塾大)★

* (2) 等式 $f(x) = \int_0^1 x^2 t f(t)dt + x + 1$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。★★

考え方 (2) $\int_0^1 x^2 t f(t)dt$ は t についての積分なので, $\int_0^1 x^2 t f(t)dt = x^2 \int_0^1 t f(t)dt$

246 (1) $\int_2^x (t^2 + 3t + 1)dt, \int_x^1 (t^3 - t - 1)dt$ をそれぞれ x で微分せよ。★

例題 (2) 関数 $f(x)$ と定数 k が等式 $\int_3^x f(t)dt = 2x^2 - 4x + k$ を満たすとき, $f(x) = \boxed{\text{ア}}$ で, $k = \boxed{\text{イ}}$ である。(神奈川大)★

例題 (3) 実数 t に対して, $f(t) = \int_0^t (x^2 - 5x + 6)dx$ とおく。関数 $f(t)$ の極小値を求めよ。(東京電機大)★★

例題 247 (1) 定積分 $\int_{-2}^2 (x + |x^2 - 1|)dx$ の値を求めよ。(神奈川大)★★

例題 (2) a が $0 \leq a \leq 3$ を満たす定数のとき, $\int_0^3 |t - a|dt$ を求めよ。★★

考え方 絶対値の中の式が 0 以上, 0 以下となる区間に分けて計算する。

A

例題 248 2 つの整式 $f(x), g(x)$ と, それらの導関数 $f'(x), g'(x)$ の間に $f(x) - g(x) = x^2, f'(x) + g'(x) = 5x^2 + x + 1, g(0) = 7$ が成り立つとき, $f(x)$ を求めよ。(近畿大)★★

例題 249 等式 $f(x) = \int_{-1}^1 (x - t)f(t)dt + 7$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。(立教大)★★

* 250 d を実数の定数, $f(t)$ を 2 次関数として, 次の関数 $F(x)$ を考える。

$$F(x) = \int_d^x f(t)dt$$

(1) $F(d) = \boxed{\text{ア}}, F'(x) = \boxed{\text{イ}}$ である。

(2) $F(x)$ が $x = 1$ で極大値 5, $x = 2$ で極小値 4 をとるとき, $f(t)$ および d を求めよ。(慶應義塾大)★★

251 t の関数 $S(t)$ を, $S(t) = \int_0^1 |x^2 - t^2|dx$ とする。このとき, $S(1)$ の値を求めよ。また, $0 \leq t \leq 1$ における $S(t)$ の最大値と最小値, およびそのときの t の値を求めよ。(長崎大)★★★

B

* 252 a を実数とする。

(1) 定積分 $\int_0^1 |x^2 - ax|dx$ を求めよ。

(2) この定積分の値を最小にする a の値と, そのときの定積分の値を求めよ。(弘前大)★★★★

解説
動画

公式

30. 面積

基本問題

253 次の曲線や直線で囲まれた部分の面積を求めよ。

例題 (1) $y = -x^2 + x + 2$ ($x \geq 0$), x 軸, y 軸, $x = 3$

例題 (2) $y = 2x^2 + 2x - 4$, x 軸

例題 (3) $y = x^2 + 3x - 1$, $y = x + 2$

例題 (4) $y = x^2 - x$, $y = -x^2 + 3x + 4$

●面積

まず、曲線や直線の共有点の x 座標を求めて、グラフをかく。その後、グラフの上下関係に注意して定積分を計算する。

柱

例題 254 (1) 曲線 $C: y = -x^3 + 3x^2 + 3x - 4$ と直線 $\ell: y = 2x - 1$ の共有点の x 座標を求めよ。また、曲線 C と直線 ℓ によって囲まれた部分の面積を求めよ。

★

例題 (2) 曲線 $y = x^3 - 4x$ と、その曲線上の点 $(1, -3)$ における接線とで囲まれた部分の面積を求めよ。

(南山大)★

例題 255 関数 $f(x) = x^2 - 3x + 2$ および座標平面上の曲線 $C: y = f(x)$ について、次の問いに答えよ。

(1) 点 $(2, -1)$ から曲線 C に異なる 2 本の接線が引ける。それぞれの接線の方程式と接点の座標を求めよ。

(2) 曲線 C と、(1)で求めた 2 本の接線によって囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(改 宮崎大)★★

例題 256 xy 平面において、直線 $y = kx$ が、曲線 $y = x^2 - 4x$ と x 軸で囲まれる部分の面積 S を 2 等分するとき、 $k = \boxed{ア}$ であり、 $S = \boxed{イ}$ である。

(関西学院大)★★

257 曲線 $y = |3x^2 - 6x|$ と直線 $y = 3x$ で囲まれた部分の面積を求めよ。

(久留米大)★★

A

例題 258 xy 平面上の曲線 $C: y = |2x - 1| - x^2 + 2x + 1$ について

- (1) 曲線 C の概形をかけ。
- (2) 直線 ℓ が曲線 C と異なる 2 点において接するとき、 ℓ の方程式を求めよ。
- (3) (2)の直線 ℓ と曲線 C で囲まれた図形の面積 S を求めよ。(改 岡山大)★★★

例題 259 放物線 $C: y = 2x^2$ と、点 $(1, 5)$ を通り傾きが m である直線 ℓ について、次の問いに答えよ。

- (1) C と ℓ が異なる 2 点で交わることを示せ。
- (2) C と ℓ で囲まれた部分の面積 S を m の式で表せ。
- (3) (2)の面積 S が最小となるとき、直線 ℓ の方程式を求めよ。

(東京電機大)★★★

*260 曲線 $C: y = x^3 - x$ 上の点 $P(a, a^3 - a)$ における接線を ℓ とし、曲線 C と接線 ℓ の点 P 以外の共有点を Q とする。ただし、 $a > 0$ とする。

解説
動画

- (1) 点 Q の x 座標を a を用いて表せ。
- (2) 曲線 C と接線 ℓ とで囲まれた部分の面積 S_1 を a を用いて表せ。
- (3) 点 Q における曲線 C の接線を m とする。曲線 C と接線 m とで囲まれた部分の面積を S_2 とするとき、 $\frac{S_2}{S_1}$ は a の値によらず一定であることを示せ。

(改 福岡教育大)★★★

B

例題 261 a を実数とし、 $f(x) = x - x^3$, $g(x) = a(x - x^2)$ とする。2 つの曲線 $y = f(x)$, $y = g(x)$ は $0 < x < 1$ の範囲に共有点をもつ。

解説
動画

- (1) a のとりうる値の範囲を求めよ。
- (2) $y = f(x)$ と $y = g(x)$ で囲まれた 2 つの部分の面積が等しくなるような a の値を求めよ。

(一橋大)★★★★