

公式

16. 多項式の除法, 分数式, 二項定理

基本問題

●二項定理

$$\begin{aligned}
 (a+b)^n &= {}_nC_0a^n + {}_nC_1a^{n-1}b \\
 &\quad + {}_nC_2a^{n-2}b^2 + \cdots \\
 &\quad + {}_nC_ra^{n-r}b^r + \cdots \\
 &\quad + {}_nC_{n-1}ab^{n-1} + {}_nC_nb^n \\
 {}_nC_ra^{n-r}b^r &\text{を } (a+b)^n \text{ の展開} \\
 &\text{式の一般項という。}
 \end{aligned}$$

例題 131 (1) $6x^3 - 2x^2 - 6x$ を $x^2 - 1$ で割ったときの商と余りを求めよ。

例題 (2) $\frac{x^2+8x+7}{x^2-7x+10} \div \frac{x^2-2x-3}{x^2-5x+6}$ を計算せよ。

例題 (3) $\frac{3}{x^2-9} - \frac{1}{x^2+4x+3}$ を計算せよ。

例題 (4) $(a+b)^{21}$ の展開式における $a^{18}b^3$ の係数を求めよ。

柱

例題 132 整式 $x^4 - 2x^3 + x - 2$ を整式 $P(x)$ で割ると商が $x^2 + 1$, 余りは $3x - 1$ であるという。このとき $P(x)$ を求めよ。(明治薬科大)★

133 次の問いに答えよ。

例題 (1) $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^9$ を展開したときの定数項を求めよ。(東京電機大)★

例題 (2) $(2x - y + z)^8$ の展開式における $x^2y^3z^3$ の係数を求めよ。(鹿児島大)★★

*134 次の式の値を求めよ。

例題 (1) ${}_{10}C_1 + {}_{10}C_2 + {}_{10}C_3 + \cdots + {}_{10}C_{10}$ (★★)

例題 (2) ${}_nC_0 - {}_nC_1 + {}_nC_2 - {}_nC_3 + \cdots + (-1)^n {}_nC_n$ (改 武庫川女子大)★★

考え方 二項定理 $(1+x)^n = {}_nC_0 + {}_nC_1x + {}_nC_2x^2 + {}_nC_3x^3 + \cdots + {}_nC_nx^n$ を利用する。

A

例題 135 $\frac{x}{1 + \frac{1}{x}} - \frac{3}{1 - \frac{4}{x}}$ を簡単にせよ。

(金沢工業大)★★

例題 136 $x = 2 + \sqrt{3}$ のとき, 式 $x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 3x + 8$ の値を求めよ。

(昭和薬科大)★★

例題 137 13^{13} を 144 で割ったときの余りを求めよ。

(早稲田大)★★

例題 138 $(x+1)^8(x-1)^4$ を展開したとき, x^{10} の項の係数を求めよ。また, $(x^2+x+1)^6$ を展開したとき, x^{10} の項の係数を求めよ。(慶應義塾大)★★★

B

*139 p を素数とすると, 次のことを証明せよ。

- (1) $1 \leq k \leq p$ を満たす自然数 k について, 等式 $p \cdot {}_{p-1}C_{k-1} = k \cdot {}_pC_k$ が成り立つ。
- (2) $1 \leq k \leq p-1$ を満たす自然数 k について, ${}_pC_k$ は p の倍数である。
- (3) $2^p - 2$ は p の倍数である。

(東北学院大)★★★

公式

17. 式と証明

基本問題

【例題】140 (1) $\frac{x-1}{x^2+8x+15} = \frac{a}{x+3} + \frac{b}{x+5}$ が x について

の恒等式のとき、実数 a, b の値を求めよ。

【例題】(2) $a+b=c$ のとき、 $a^3+b^3+3abc=c^3$ を示せ。

【例題】(3) 不等式 $|x|+2|y| \geq \sqrt{x^2+y^2}$ を示せ。

【例題】(4) a を正の数とすると、 $a + \frac{1}{a} \geq 2$ を示せ。

また、等号が成り立つときの a の値を求めよ。

●不等式の証明

① $A > B \iff A - B > 0$

② $A \geq 0, B \geq 0$ のとき、
 $A > B \iff A^2 > B^2$

●相加平均・相乗平均

$a > 0, b > 0$ のとき、

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

($a=b$ のとき、等号成立)

柱

【例題】141 $\frac{x}{b-c} = \frac{y}{c-a} = \frac{z}{a-b}$ のとき、 $ax+by+cz=0$ が成り立つことを証明せよ。

(甲南大)★★

【考え方】条件式が比例式のときは、「 $=k$ 」とおいて考える。

【例題】142 (1) $a > 0, b > 0$ とする。 $\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{9}{a}\right)$ は $ab = \boxed{\text{ア}}$ のとき最小となり、その最小値は $\boxed{\text{イ}}$ である。

(福岡大)★

(2) $x > 1$ のとき、 $x + \frac{2}{x-1}$ の最小値を求めよ。

(改 大阪工業大)★★

【例題】143 (1) $a+b=1$ のとき $a^2+b^2 \geq \frac{1}{2}$ を示せ。

(2) $a+b+c=1$ のとき $a^2+b^2+c^2 \geq \frac{1}{3}$ を示せ。

(名古屋女子大)★★

【考え方】文字が複数ある場合は、条件式から文字を消去して考えるとうまくいく場合が多い。

A

【例題】144 実数 a, b, c が $\frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b} = \frac{a+b}{c}$ を満たすとき、この式の値を求めよ。

(青山学院大)★★

【例題】145 連立方程式 $x-y+z=3 \cdots \cdots \textcircled{1}$, $3x-y-z=2 \cdots \cdots \textcircled{2}$ を満たすすべての実数 x, y, z に対して $ax^2+by^2+cz^2=1 \cdots \cdots \textcircled{3}$ が成り立つような実数 a, b, c を求めよ。

(改 近畿大)★★

【例題】146 (1) x, y, z が正の実数のとき次の不等式を示せ。

$$\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}{3} \leq \sqrt{\frac{x+y+z}{3}}$$

(改 岐阜聖徳学園大)★★★

【例題】(2) a, b, c, x, y, z を実数とする。次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\sqrt{(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)} \geq |ax+by+cz|$$

また、 $x+2y+3z=7$ のとき、 $x^2+y^2+z^2$ の最小値を求めよ。

(改 早稲田大)★★★

*147 実数 α, β, γ が $\alpha+\beta+\gamma=3$ を満たしているとき、 $p=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$, $q=\alpha\beta\gamma$ とおく。

【例題】(1) $p=q+2$ のとき、 α, β, γ の少なくとも1つは1であることを示せ。

【例題】(2) $p=3$ のとき、 α, β, γ はすべて1であることを示せ。

(大阪市立大)★★★

B

148 a, b, c, d は実数とする。次の不等式が成り立つことを証明せよ。

$$(1) \frac{a^2+b^2}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$(2) a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$$

$$(3) \frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4} \geq \left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^2$$

(富山県立大)★★★★

公式

18. 複素数と2次方程式

基本問題

●解と係数の関係

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解を α, β とすると、

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$$

$$\alpha\beta = \frac{c}{a}$$

例題 149 (1) $\frac{1}{3-i} + \frac{2}{2+i}$ を計算せよ。

例題 (2) 2次方程式 $x^2+(m+2)x+m^2-1=0$ が虚数解をもつとき、実数 m の値の範囲を求めよ。

(3) 2次方程式 $ax^2+3x+c=0$ の2つの解の和が5で、積が6であるとき、 a と c の値を求めよ。

柱

例題 150 i を虚数単位とするとき、 $(x+yi)^2=-2i$ を満たす実数 x, y を求めよ。
(東北学院大)★★

例題 151 (1) 2次方程式 $x^2-2x+6=0$ の2つの解を α, β とするとき、 $\alpha^3+\beta^3, (1-\alpha)(1-\beta)$ の値を求めよ。★

例題 (2) b を定数とする2次方程式 $x^2+bx+2=0$ がある。この方程式の1つの解が他の解の2倍であるとき、定数 b の値を求めよ。(いわき明星大)★★

*152 a, b を0でない実数の定数とし、2次方程式 $x^2+ax+b=0$ の2つの解を α, β とする。

(1) $a=1+i$ のとき、 a, b の値を求めよ。

(2) $\alpha+\beta, \alpha\beta$ が2次方程式 $x^2+bx+a=0$ の2つの解のとき、 a, b の値を求めよ。(名城大)★★

考え方 (1) 与えられた方程式は実数を係数とする2次方程式だから、 $x=1+i$ が解であれば、その共役な複素数も解である。

A

例題 153 $z = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ (ただし、 i は虚数単位) とするとき、 z^{2019} の実部と虚部を求めよ。
(改 職業能力開発総合大)★★

例題 154 k は実数の定数、 i は虚数単位とする。 x の方程式 $(3+i)x^2+(6k+i)x+15=0$ が実数解をもつとき、 k の値を求めよ。
(京都産業大)★★

例題 155 2次方程式 $x^2+(2m+5)x+(m+3)=0$ が整数の解をもつための整数 m の値をすべて求めよ。
(神戸薬科大)★★★

B

*156 x, y を実数とし、 $x^2-xy+y^2=1$ を満たすとする。 $t=x+y$ とおくと、次の問いに答えよ。

(1) xy を t を用いて表せ。

(2) t の値の範囲を求めよ。

(3) $2x+3xy+2y$ の最大値および最小値と、そのときの x, y の値を求めよ。
(滋賀大)★★★



公式

19. 高次方程式

基本問題

例題 157 (1) 整式 x^3+2x^2+ax+b は $x-1$ で割り切れ、 $x+2$ で割ると 6 余る。定数 a, b の値を求めよ。

例題 (2) 1 の 3 乗根をすべて求めよ。

(3) 次の方程式を解け。

例題 (i) $x^3-9x^2-25x+33=0$

例題 (ii) $2x^3+x^2+x-1=0$

例題 (iii) $x^4+3x^3-4x^2-3x+3=0$

●剰余の定理

整式 $P(x)$ を $x-a$ で割ったときの余りは、 $P(a)$ に等しい。

●因数定理

整式 $P(x)$ が $x-a$ を因数にもつ $\iff P(a)=0$

(整式 $P(x)$ が $ax+b$ を因数にもつ $\iff P(-\frac{b}{a})=0$)

柱

例題 158 * (1) 整式 $P(x)$ を $2x^2+9x-5$ で割ると余りが $3x+5$ で、 $x-2$ で割ると余りが -3 のとき、 $P(x)$ を $x^2+3x-10$ で割った余りを求めよ。(立教大)★★

例題 (2) 整式 x^{2011} を x^2+1 で割った余りを求めよ。(京都薬科大)★★

例題 159 1 の 3 乗根のうち、虚数であるものの 1 つを ω とする。このとき、

$$\omega^2 + \omega = \boxed{\text{ア}}, \quad \omega^{10} + \omega^5 = \boxed{\text{イ}}, \quad \frac{1}{\omega^{10}} + \frac{1}{\omega^5} + 1 = \boxed{\text{ウ}},$$

$$(\omega^2 + 5\omega)^2 + (5\omega^2 + \omega)^2 = \boxed{\text{エ}} \text{ である。} \quad (\text{関西大}) \text{★★}$$

考え方 1 の 3 乗根は $x^3=1$ の解であるから、 $x^3-1=0$ より、 $(x-1)(x^2+x+1)=0$
1 の 3 乗根で虚数であるものの 1 つを ω とすると、 $\omega^3=1, \omega^2+\omega+1=0$

例題 160 i を虚数単位とし、 a, b は実数とする。3 次方程式 $x^3+ax^2+bx+40=0$ が $-1+3i$ を解にもつとき、 $a=\boxed{\text{ア}}, b=\boxed{\text{イ}}$ である。このとき、他の解を求めると $\boxed{\text{ウ}}$ と $\boxed{\text{エ}}$ である。ただし、 $\boxed{\text{エ}}$ は実数である。 $a=-1+3i,$

$$\beta=\boxed{\text{ウ}}, \gamma=\boxed{\text{エ}} \text{ とおくと、} \frac{1}{a} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \boxed{\text{オ}} \text{ である。}$$

(改 関西大)★★

A

例題 161 x についての整式 x^4+x^3+ax+b (a, b は定数) が $(x-2)^2$ で割り切れるとき、 a, b の値を求めよ。(関西学院大)★★

例題 162 3 次方程式 $x^3+(a+2)x^2-4a=0$ がちょうど 2 つの実数解をもつような実数 a をすべて求めよ。(学習院大)★★

例題 163 $y=x+\frac{1}{x}$ とおくと、次の問いに答えよ。

(1) $x^3+\frac{1}{x^3}$ を y の多項式として表せ。

(2) 方程式 $x^6+x^5-9x^4-10x^3-9x^2+x+1=0$ ……①を y で表し、①を満たすすべての複素数 x を求めよ。(改 お茶の水女子大)★★

例題 164 (1) $x^{2020}+x^{2021}$ を x^2+x+1 で割った余りを求めよ。(広島工業大)★★

例題 (2) 整式 $P(x)$ を $(x+1)^2$ で割ったときの余りが $18x+9$ であり、 $x-2$ で割ったときの余りが 9 であるとき、 $P(x)$ を $(x+1)^2(x-2)$ で割ったときの余りを求めよ。(神奈川大)★★★

B

165 実数 x, y, z が次の 3 つの等式

$$x+y+z=0, \quad x^3+y^3+z^3=3, \quad x^5+y^5+z^5=15$$

を満たしている。 $x^2+y^2+z^2=a$ とおくと、次の問いに答えよ。

(1) $xy+yz+zx$ を a を用いて表せ。

(2) xyz の値を求めよ。

(3) a の値を求めよ。(静岡大)★★★★

公式

20. 点と直線

基本問題

例題 166 (1) 平面上の線分 AB を 3 : 2 に内分する点の座標が (1, 3), 3 : 2 に外分する点の座標が (5, 7) であるとき, 点 A の座標は $\boxed{\text{ア}}$, 点 B の座標は $\boxed{\text{イ}}$ である。また, 原点 O と点 A, B を頂点とする $\triangle OAB$ の重心の座標は $\boxed{\text{ウ}}$ である。

例題 (2) 2 直線 $2x - 3y + 1 = 0$, $ax + (a - 3)y + a = 0$ は, $a = \boxed{\text{ア}}$ のとき平行になり, $a = \boxed{\text{イ}}$ のとき垂直に交わる。

例題 (3) 点 A(2, -8) と直線 $2x - 3y + 11 = 0$ の距離を求めよ。

●内分点, 外分点の座標

$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ の

とき, 線分 AB を $m : n$

に内分する点の座標は,

$$\left(\frac{nx_1 + mx_2}{m + n}, \frac{ny_1 + my_2}{m + n} \right)$$

線分 AB を $m : n$ に外分する

点の座標は,

$$\left(\frac{-nx_1 + mx_2}{m - n}, \frac{-ny_1 + my_2}{m - n} \right)$$

●点と直線の距離

点 $A(x_1, y_1)$ と直線

$ax + by + c = 0$ の距離 d は,

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

柱

例題 167 k は定数とする。座標平面上の直線 $(3k + 1)x - (2k + 4)y - 10k + 10 = 0$ は, k の値に関係なく定点を通る。その定点の座標を求めよ。(立教大)★★

考え方 k の値に関係なく定点を通る → どんな k の値を代入しても成り立つ直線の式を k についての恒等式とみればよい。

*168 直線 $\ell: y = 2x - 3$ と 2 点 A(0, 2), B(3, 8) がある。

例題 (1) 直線 ℓ に関して点 A と対称な点 P の座標を求めよ。

例題 (2) 点 Q が直線 ℓ 上にあるとき, QA + QB を最小にする点 Q の座標と, QA + QB の最小値を求めよ。(改中京大)★★

考え方 (1) 線分 AP の中点は直線 ℓ 上にあり, 直線 AP は直線 ℓ に垂直である。

*169 3 点 A(3, 2), B(-5, 0), C(1, -4) について, 次の問いに答えよ。

(1) $\triangle ABC$ の外接円の中心の座標を求めよ。

例題 (2) $\triangle ABC$ の面積を求めよ。★★

A

例題 170 xy 平面において, 曲線 $y = x^2 + 1$ 上の点 $P(t, t^2 + 1)$ から直線 $y = x$ に下ろした垂線 PH の長さを $f(t)$ とするとき, 次の問いに答えよ。

(1) t の関数 $f(t)$ を求めよ。

(2) $f(t)$ の最小値と, そのときの t を求めよ。

(3) $f(t)$ を最小とするような P, H の座標を求めよ。(愛知教育大)★★

例題 171 $\triangle ABC$ において, 辺 BC を 3 等分する点 P, Q を $BP = PQ = QC$ となるようにとる。このとき, 次の関係式が成り立つことを証明せよ。

$$2AB^2 + AC^2 = 3(AP^2 + 2BP^2) \quad (\text{福島大}) \text{★★★}$$

*172 点 (1, 2) を通る直線 ℓ は, 放物線 $y = \frac{1}{5}x^2$ と原点 O 以外の 2 点 P, Q で交わり, $\angle POQ = 90^\circ$ である。このとき, ℓ の方程式を求めよ。解説動画

(関西大)★★★

B

173 a, b, c は実数とし, $a < b$ とする。平面上の相異なる 3 点 $A(a, a^2)$, $B(b, b^2)$, $C(c, c^2)$ が, 辺 AB を斜辺とする直角三角形を作っているとする。解説動画

(1) a を b, c を用いて表せ。

(2) $b - a \geq 2$ が成り立つことを示せ。

(3) 斜辺 AB の長さの最小値と, そのときの A, B, C の座標をそれぞれ求めよ。(神戸大)★★★★