

公式

11. 確 率 (1)

基本問題

例題 86 袋に赤玉 3 個, 白玉 4 個が入っている。この袋から 2 個の玉を取り出すとき, 次の確率を求めよ。

- (1) 2 個とも赤玉である確率
- (2) 2 個のうち少なくとも 1 個が赤玉である確率
- (3) 2 個の玉が同じ色である確率

●余事象の確率

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

●和事象の確率

$$P(A \cup B)$$

$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

特に, A, B が排反事象であるとき,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

柱

87 さいころを 4 回続けて投げる。出た目の和が 7 以上である確率を求めよ。

(愛媛大)★★

考え方 出た目の和が 7 以上になる場合より, 6 以下になる場合の方が少ない。このような場合は余事象の確率を考えると簡単になる場合が多い。

例題 88 4 人で 1 回だけじゃんけんをする。ただし, あいこになった場合も 1 回と数える。

- (1) 1 人が勝つ確率を求めよ。
- (2) あいこになる確率を求めよ。
- (3) 勝つ人数の期待値を求めよ。

★★

例題 89 さいころを 2 回投げ, 出た目の数をそれぞれ a, b として, 2 次方程式 $x^2 + ax + b = 0$ を考える。この方程式が実数解をもつ確率は $\frac{7}{12}$ である。また, この方程式が有理数の解をもつ確率は $\frac{1}{6}$ である。(福岡大)★★

考え方 さいころを 2 回投げる場合は, すべての場合を表に書き出す方法が有効。

A

例題 90 3 個のさいころを同時に投げるとき, 出る目の積が 4 の倍数である確率を求めよ。(小樽商科大)★★

91 製品が 40 個あり, そのうち 2 個が不良品である。

- (1) この 40 個の中から 5 個を同時に取り出したとき, 1 個以上の不良品が含まれる確率を求めよ。
- (2) この 40 個の中から何個かを同時に取り出したとき, 1 個以上の不良品が含まれる確率を $\frac{1}{2}$ より大きくしたい。取り出す製品の最小個数を求めよ。

(弘前大)★★

例題 92 n 個のさいころを同時に投げる。 n を 2 以上の自然数とすると, 次の確率を求めよ。

- (1) 出る目の最小値が 3 である確率
- (2) 出る目の最小値が 3 で, 最大値が 5 である確率

★★★

93 1 つのさいころを 4 回投げる。さいころのそれぞれの目が出る確率が等しいとする。

- (1) さいころの目の出方は全部で何通りあるか。
- (2) 複数回出る目が少なくとも 1 つある確率を求めよ。
- (3) 1 つの目が他のどの目よりも多く出る確率を求めよ。(早稲田大)★★★

解説
動画

B

***94** 1 辺の長さが 1 の正六角形 ABCDEF の頂点から異なる 3 点を選び, これらを頂点とする三角形を作る。

- (1) 作られる三角形が正三角形となる確率を求めよ。
- (2) 作られる三角形の面積の期待値を求めよ。(奈良女子大)★★★★

解説
動画

公式

12. 確率 (2)

基本問題

【例題】95 5枚の硬貨を同時に投げるとき、次の問いに答えよ。

- (1) 表が5枚出る確率を求めよ。
- (2) 表が4枚、裏が1枚出る確率を求めよ。
- (3) 裏が2枚以上出る確率を求めよ。

●反復試行の確率

1回の試行で事象 A の起こる確率を p とすると、独立な試行を n 回行って r 回 A が起こる確率は、

$${}_nC_rp^r(1-p)^{n-r}$$

柱

【例題】96 当たりくじ5本を含む20本のくじの中から、引いたくじはもとに戻さないで、1本ずつ2回続けてくじを引く。次の確率を求めよ。

- (1) 1本目が当たる確率
- (2) 2本目が当たる確率
- (3) 2本とも当たる確率
- (4) 1本だけ当たる確率 (改 関西学院大)★

【例題】97 A , B の2つのチームで対戦を行い、先に3勝したチームを優勝とする。

1回の試合で A が勝つ確率は $\frac{1}{3}$ とする。ただし、引き分けはなく、必ず A

と B のいずれか一方の勝ちが決定するものとする。

- (1) 4試合で優勝が決まる確率を求めよ。
- (2) A が優勝する確率を求めよ。 (東海大)★★

*98 赤玉が3個、白玉が2個入った袋の中から、 A , B の2人がこの順に玉を取り出す。 A は玉を1個取り出し、これが赤玉であればその玉をもとに戻し、白玉であればその玉はもとに戻さない。そのあと、 B が玉を同時に2個取り出す。

- (1) B が取り出した玉が2個とも赤玉である確率を求めよ。
- (2) B が取り出した玉が2個とも赤玉であるとき、 A の取り出した玉が白玉である条件付き確率を求めよ。 (職業能力開発総合大)★★

【考え方】事象 A が起こったときに事象 B が起こる条件付き確率は、

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

A

【例題】99

1辺の長さが1の正方形の頂点を時計回りに A , B , C , D とする。点 P は A から出発し、硬貨を投げるたびに正方形の周上を時計回りに動く。1枚の硬貨を投げて、表が出たときには P は2だけ進み、裏が出たときには P は1だけ進む。硬貨を投げたときに、表と裏の出る確率は等しいとする。

- (1) 硬貨を5回続けて投げたとき、 P が A にいる確率を求めよ。
- (2) 硬貨を10回続けて投げたとき、 P が D にいる確率を求めよ。

(中央大)★★

【例題】100

ある病原菌の検査薬は、病原菌に感染しているのに誤って陰性と判断する確率が20%、感染していないのに誤って陽性と判断する確率が10%である。全体の20%がこの病原菌に感染している集団から1つの検体を取り出して、独立に2回、検査薬で検査する。このとき、次の確率を求めよ。

- (1) 2回とも陰性であったが、実際には病原菌に感染している確率
- (2) 少なくとも1回は陽性であったが、実際には病原菌には感染していない確率 (改 上智大)★★★

101

コインが5枚ある。さいころを振って出た目によって、これらのコインを1枚ずつ3つの箱 A , B , C のいずれかに入れていく。出た目が1であればコインを1枚、箱 A に入れる。出た目が2か3であればコインを1枚、箱 B に入れる。出た目が4か5か6であればコインを1枚、箱 C に入れる。さいころを5回振ったとき、次の問いに答えよ。

- (1) 箱 A と箱 B にコインがそれぞれちょうど2枚ずつ入っている確率を求めよ。
- (2) A , B いずれの箱にもコインが1枚以上入っている確率を求めよ。

(千葉大)★★★

B

【例題】102

n を5以上の整数とする。1枚の硬貨を投げる試行を n 回繰り返すとき、表が出る回数が、ちょうど n 回目の試行で5になる確率を p_n とする。

- (1) p_n を n を用いて表せ。
- (2) $\frac{p_{n+1}}{p_n}$ を n を用いて表せ。また、 p_n の最大値を求めよ。

(改 佐賀大)★★★★

公式

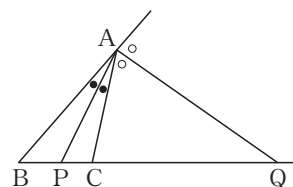
13. 図形の性質

基本問題

例題 103 $\triangle ABC$ において、 $AB=12$, $BC=6$, $CA=9$ とし、 $\angle A$ の二等分線と対辺 BC との交点を P とする。また、頂点 A における外角の二等分線と対辺 BC の延長との交点を Q とする。このとき、次の線分の長さを求めよ。

- (1) 線分 PC
- (2) 線分 PQ

●角の二等分線と比



上の図において、
 $BP : PC = AB : AC$
 $BQ : QC = AB : AC$

柱

例題 104 $\triangle ABC$ の辺 AB を $1:2$ に内分する点を M 、辺 BC を $3:2$ に内分する点を N とする。線分 AN と CM の交点を O とし、直線 BO と辺 AC の交点を P とする。 $\triangle AOP$ の面積が 1 のとき、 $\triangle ABC$ の面積 S を求めよ。

(岡山理科大)★

105 $\angle BAC=90^\circ$ の直角三角形 ABC に円が内接している。この内接円は、辺 AB と点 D で、辺 BC と点 E で、辺 CA と点 F でそれぞれ接している。また、 $AF=3$, $FC=7$ とする。このとき、直角三角形 ABC の 3 辺の長さの合計は $\boxed{\text{ア}}$ である。また、内接円の半径の長さは $\boxed{\text{イ}}$ である。さらに、 $\angle DEB + \angle FEC = \boxed{\text{ウ}}$ である。

(西南学院大)★★

例題 106 $AB=9$, $BC=12$, $CA=15$ の $\triangle ABC$ の外接円を O とする。辺 BC 上に点 P をとり、線分 AP の延長と円 O との交点を Q とし、 Q における円 O の接線と辺 AB の延長との交点を R とする。

- (1) 円 O の直径を求めよ。
- (2) $BR=6$ のとき、線分 QR の長さを求めよ。
- (3) $BP=9$ のとき、線分 PQ の長さを求めよ。

(西南学院大)★★

A

107 1 辺の長さが 4 である正八面体について、次の問いに答えよ。

- (1) 表面積を求めよ。
- (2) 体積を求めよ。
- (3) 正八面体の隣り合う 2 面のなす角を θ とするとき、 $\cos \theta$ の値を求めよ。

★★

***108** 鋭角三角形 ABC において、頂点 A , B , C から各対辺に垂線 AD , BE , CF を下ろす。これらの垂線は垂心 H で交わる。

- (1) 四角形 $BCEF$ と $AFHE$ が円に内接することを示せ。
- (2) $\angle ADE = \angle ADF$ であることを示せ。

(東北大)★★

***109** 円周上に 4 点 A , B , C , D が反時計回りに並んでいる。直線 AB と直線 DC の交点を E 、線分 AC と BD の交点を F とする。 $AB=1$, $BE=3$, $AE=4$ であり、 $\triangle DCF$ の面積は $\triangle ABF$ の面積の 4 倍である。 $FA=x$,

$FB=y$, $CE=t$, $\frac{y}{x}=u$ において、以下の問いに答えよ。

- (1) FC , FD を x , y で表せ。
- (2) t の値を求めよ。
- (3) u の値を求めよ。
- (4) 面積の比の値 $\frac{\triangle AED}{\triangle ABF}$ を求めよ。

(名古屋工業大)★★★

B

例題 110

1 辺の長さ 1 の正三角形 PQR の内接円 C_1 の中心を O_1 とする。円 C_1 と 2 辺 PQ , PR に接する円 C_2 の中心を O_2 とする。次に、円 C_1 と C_2 と辺 PR に接する円 C_3 の中心を O_3 とする。円 C_i の半径を r_i とする ($i=1, 2, 3$)。このとき、 $r_1=\boxed{\text{ア}}$, $r_2=\boxed{\text{イ}}$ である。点 O_i から辺 PR に下ろした垂線と辺 PR との交点を H_i とする ($i=1, 2, 3$)。線分 H_1H_3 , H_2H_3 の長さをそれぞれ l_1 , l_2 とする。このとき、 $l_1+l_2=\boxed{\text{ウ}}$, $l_1^2=\boxed{\text{エ}}r_1r_3$,

$\frac{l_1}{l_2}=\boxed{\text{オ}}$, $r_3=\boxed{\text{カ}}$ である。

(上智大)★★★

公式

14. 整数 (1)

基本問題

- 111 $\sqrt{264n}$ が自然数となるような自然数 n のうち、最小の自然数は $\boxed{\text{ア}}$ であり、最大の3桁の自然数は $\boxed{\text{イ}}$ である。

●約数と倍数

素因数分解を利用すると、見通しがよくなることが多い。

柱

- 例題 112 正の整数 a, b ($a < b$) について、 a と b の最大公約数が30で、最小公倍数が1800であるような a, b の組は全部で何組あるか。 (金沢工業大)★★

- 例題 113 m, n を自然数とする。

- $30!$ が 2^m で割り切れるとき、最大の m の値は $\boxed{\text{ア}}$ である。
- $125!$ は末尾に0が連続して $\boxed{\text{イ}}$ 個並ぶ。したがって、 $n!$ が 10^{40} で割り切れる最小の n の値は $\boxed{\text{ウ}}$ である。 (立命館大)★★

- 例題 114 2つの自然数 a と b が互いに素であるとき、 $3a+b$ と $5a+2b$ も互いに素であることを証明せよ。 (改 山口大)★★

- 115 (1) m が3の倍数でないならば、 $(m+2)(m+1)$ が6の倍数であることを示せ。
 (2) m が奇数ならば、 $(m+3)(m+1)$ が8の倍数であることを示せ。
 (3) $(m+3)(m+2)(m+1)$ が24の倍数でないならば、 m が偶数であることを示せ。 (東北大)★★

考え方 整数を余りによって分類して考える。正の整数 m に対して、どんな整数も $mk, mk+1, mk+2, \dots, mk+(m-1)$ (k は整数) のいずれかの形に分類される。

A

- *116 $f(n) = (n-1)n(n+1)$, $g(n) = n^5 - n$ とする。このとき、すべての整数 n に対して、 $f(n)$ は6の倍数、 $g(n)$ は30の倍数であることをそれぞれ証明せよ。 (長崎大)★★

- *117 整数 a に対して、 a を13で割った余りを $r(a)$ ($0 \leq r(a) \leq 12$) で表すことにする。
 (1) 整数 a, b に対して、 $r(ab) = r(r(a)r(b))$ であることを示せ。
 (2) $r(2^3)$, $r(2^6)$, $r(2^{12})$ を求めよ。
 (3) $r(2^{2019})$ を求めよ。 (改 大阪府立大)★★★

- 例題 118 自然数 n の素因数分解が $n = p^a q^b$ で与えられている。 a, b は正の整数、 p, q は異なる素数である。

- n の正の約数の個数を求めよ。
- n 以下の自然数のうち、 p の倍数の個数および pq の倍数の個数を求めよ。
- n 以下の自然数のうち、 n と互いに素であるものの個数は、

$$n \left(1 - \frac{1}{p}\right) \left(1 - \frac{1}{q}\right) \text{ であることを証明せよ。} \quad (\text{改 西南学院大}) \text{★★★}$$

- *119 2以上の自然数 n に対し、 n と n^2+2 がともに素数になるのは $n=3$ の場合に限ることを示せ。 (京都大)★★★ 解説動画

B

- 120 正の整数 x について、次の問いに答えよ。なお、ここで x の下1桁とは x を10で割った余りであり、 x の下2桁とは x を100で割った余りとする。 解説動画

- $10 \leq x \leq 40$ の範囲で、 x の下1桁と x^2 の下1桁が一致するような x の個数を求めよ。
- $10 \leq x \leq 99$ の範囲で、 x^2 の下1桁と x^4 の下1桁が一致する x をすべて足した数を Y とする。整数 Y の下1桁を求めよ。
- $10 \leq x \leq 99$ の範囲で、 x^2 の下2桁が x と等しいような x をすべて求めよ。

(中央大)★★★★

公式

15. 整数 (2)

基本問題

例題 121 (1) 9991, 9797 の最大公約数を求めよ。

例題 (2) 不定方程式 $52x - 37y = 1$ の整数解をすべて求めよ。

例題 (3) 等式 $3x + 5y = 48$ を満たす正の整数 x, y の組をすべて求めよ。

例題 (4) 3進数 $2012_{(3)}$ を10進法で表すと $\boxed{\text{ア}}$, 10進数 118 を2進法で表すと $\boxed{\text{イ}}$, 10進数 1.52 を5進法で表すと $\boxed{\text{ウ}}$ である。

●ユークリッドの互除法

自然数 a, b ($a > b$) について,
 a を b で割ったときの余りを
 r ($\neq 0$) とするとき,
 $(a$ と b の最大公約数)
 $= (b$ と r の最大公約数)

●不定方程式の整数解

左の(2)のような問題は,
 まず特殊解を見つける。

柱

例題 122 (1) m と n が自然数のとき, $mn + 5m + 6n = 33$ を満たす m と n の組 (m, n) をすべて求めよ。 (福岡大)★★

例題 (2) $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{4}$ を満たす自然数の組 (x, y) をすべて求めよ。 (立教大)★★

例題 123 7で割ると5余り, 13で割ると8余るような自然数のうち, 3桁のものは $\boxed{\text{ア}}$ 個ある。その中で最大のものは $\boxed{\text{イ}}$, 最小のものは $\boxed{\text{ウ}}$ である。 (青山学院大)★★

例題 124 ある正の整数 n を10進法で表すと2桁になり, そのときの各位の数字の並びは, 整数 $n+2$ を6進法で表したときの各位の数字の並びと逆順になる。このとき, n を10進法で表すと $\boxed{\text{ア}}$, n を2進法で表すと $\boxed{\text{イ}}_{(2)}$ である。 (東京慈恵会医科大学)★★

例題 125 $\sqrt{n^2 + 60}$ が自然数となるような自然数 n をすべて求めよ。 (改 愛知工業大)★★

A

例題 126 (1) a, b, c が整数で, $1 \leq a \leq b \leq c$ かつ $abc = a + b + c$ のとき, $ab \leq 3$ であることを示せ。

(2) $1 \leq a \leq b \leq c$ かつ $abc = a + b + c$ を満たす整数 a, b, c をすべて求めよ。 (東京女子大)★★

127 n, m は自然数で $n > m$ を満たすとする。

$$n^3 + m^3 - nm^2 - n^2m - 62n + 62m$$

が10以下の素数となるような n, m の組をすべて求めよ。 (改 弘前大)★★

*128 (1) 方程式 $x^2 - 3xy + 2y^2 - 1 = 0$ を満たす整数 x, y の組 (x, y) をすべて求めよ。

(2) 方程式 $x^2 - xy + y^2 - 2x + 1 = 0$ を満たす整数 x, y の組 (x, y) をすべて求めよ。 (広島工業大)★★★

*129 (1) x を自然数とする。このとき, x^2 を4で割ったときの余りは, x が偶数のときは0であり, x が奇数のときは1であることを証明せよ。 

(2) 自然数の組 (x, y) について, $5x^2 + y^2$ が4の倍数ならば, x, y はともに偶数であることを証明せよ。

(3) 自然数の組 (x, y) で $5x^2 + y^2 = 2016$ を満たすものをすべて求めよ。 (慶應義塾大)★★★

B

130 (1) a, b, c を整数とする。 x に関する3次方程式 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ が有理数の解をもつならば, その解は整数であることを示せ。ただし, 正の有理数は1以外の公約数をもたない2つの自然数 m, n を用いて $\frac{n}{m}$ と表せることを用いよ。 

(2) 方程式 $x^3 + 2x^2 + 2 = 0$ は, 有理数の解をもたないことを背理法を用いて示せ。 (神戸大)★★★★